Esercizi Di Riepilogo

1. Determinare i punti stazionari e la loro natura per la funzione

$$f(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\arctan\frac{y}{x}$$

   definita nel dominio $\Omega = \{(x,y): \quad x > 0\}$

2. Si trovi il valore massimo e il valore minimo di

$$f(x,y,z) = x + 3y - z$$

   nell'insieme G definito dalle equazioni

$$G: \quad \begin{cases} x^2+y^2-z & = & 0 \\ \\ 2x+4y-z & = & 0 \end{cases}$$

3. Usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per trovare la massima distanza di un punto sull'ellisse $x^2+4y^2=4$ dalla retta $x+y=4$.

4. Un filo di densità $\rho(x,y) = |x|+|y|$ è disposto lungo la circonferenza $x^2+y^2=a^2$. Calcolare la massa del filo.

5. La forza di attrazione gravitazionale $\mathbf{F}$ è, in ogni punto dello spazio, il gradiente di una funzione $U(x,y,z)$, detta potenziale gravitazionale. Il potenziale gravitazionale generato da una sfera omogenea di raggio R, centrata nell'origine è

$$U(x,y,z) = \begin{cases} 2\pi\rho\left(R^2 - \dfrac{r^2}{3}\right) & r < R \\ \\ \dfrac{4}{3}\pi R^3\dfrac{\rho}{r} & r \geqslant R \end{cases}$$

   dove ρ è la dinsità della sfera (supposta costante) e $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

   (a) Verificare che il potenziale è continuo in tutto lo spazio

   (b) Calcolare la forza $\mathbf{F}$

   (c) Calcolare la divergenza di $\mathbf{F}$.

6. Determinare i momenti di inerzia

$$I_x = \iint_\Omega x^2 \rho(x,y)dxdy, \qquad I_y = \iint_\Omega y^2 \rho(x,y)dxdy,$$

dove la densità è data da $\rho(x,y) = |x-y|$, per la lamina Ω

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x}\}.$$

7. Calcolare il lavoro del campo

$$\mathbf{F} = \frac{(x, y, -2z)}{2x^2 + y^2 + z^2}$$

lungo la curva $\gamma(t) = (t, 2t, t^2)$ con $t \in [1,2]$.

8. Sia γ una curva chiusa semplice e regolare, orientata positivamente, di equazione polare $\rho = f(\theta)$, con $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Se γ è frontiera di un dominio Ω, dimostrare che

$$area(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2 d\theta.$$

Calcolare poi l'area della cardioide

$$\rho = 1 + cos(\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

9. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (e^{z^2} + ze^{x+y}, 2e^{z^2} + ze^{x+y}, 2z(x+2y)e^{z^2} + e^{x+y})$$

stabilire se esso è conservativo e, in caso affermativo, determinarme il potenziale U tale che $U(0,0,0) = 0$. Calcolare quindi il lavoro compiuto dal campo lungo la curva $\mathbf{r}(t) = (t, t-1, t^3)$, $t \in [0,1]$.

10. Sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{V} = (x + 2yz^2, z^2 - 3y, z^2 - xy)$$

e il paraboloide Σ di equazione $z = 2 - x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 2$.
a) Scrivere una parametrizzazione di Σ e calcolarne l'area.
b) Calcolare il flusso di $\mathbf{V}$ uscente da Σ.
c) Calcolare il flusso di rot$\mathbf{V}$ uscente da Σ.
d) Stabilire se $\mathbf{V}$ è conservativo.

11. Sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{V} = (x^3 - yz, 3y^2 + xz, z^2 - xy)$$

e la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 + z^2 = 4, -\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{2}\}$.
a) Scrivere una parametrizzazione di Σ e calcolarne l'area.
b) Calcolare il flusso di $\mathbf{V}$ uscente da Σ.
c) Calcolare il flusso di $\mathrm{rot}\mathbf{V}$ uscente da Σ.
d) Stabilire se $\mathbf{V}$ è conservativo.