Esercizi su Superfici Parametriche

1. Sia Σ la superficie di rotazione ottenuta da una rotazione completa della curva $z = 1 + 3x^2$, $1 \leq x \leq 3$, attorno all'asse z. a) Scrivere una parametrizzazione di Σ. b) Dopo aver verificato che il punto $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 13)$ appartiene alla superficie, determinare il versore normale ed il piano tangente a Σ in P.

   Risposte: a) $S(x,t) = (x\cos t, x\sin t, 1 + 3x^2), x \in [1,3]$, $t \in [0, 2\pi]$
   b) $\underline{n} = (-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 1)/\sqrt{145}$, $z = 6\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y - 11$

2. Ripetere l'esercizio precedente supponendo che la superficie sia generata da una rotazione completa della curva attorno all'asse x, e il punto P sia $P = (2, 13/2, 13\sqrt{3}/2)$.

   Risposte: a) $S(x,t) = (x, (1 + 3x^2)\sin t, (1 + 3x^2)\cos t), x \in [1,3]$, $t \in [0, 2\pi]$
   b) $\underline{n} = (-24, 1, \sqrt{3})/(2\sqrt{145})$, $-24x + y + \sqrt{3}z + 22 = 0$

3. Scrivere una parametrizzazione della superficie ottenuta mediante una rotazione completa attorno all'asse x di ognuna delle seguenti curve nel piano $y = 0$:

   a) $z = e^{2x}$, $0 \leq x \leq 3$ **b**) $z = \sin(\pi x)$, $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$
   c) $xz = 2$, $1 \leq x \leq 3$.

   Le superfici ottenute sono regolari?
   Ripetere quindi l'esercizio supponendo che la superficie sia generata da una rotazione completa attorno all'asse z.

   Risposte:
   I) Rotazione attorno all'asse x:
   a) $S(x,t) = (x, e^{2x}\sin t, e^{2x}\cos t), x \in [0,3]$, $t \in [0, 2\pi]$, regolare
   b) $S(x,t) = (x, \sin(\pi x)\sin t, \sin(\pi x)\cos t), x \in [0, 1/2]$, $t \in [0, 2\pi]$, non regolare in $(0,0,0)$
   c) $S(x,t) = (x, 2\sin t/x, 2\cos t/x), x \in [1,3]$, $t \in [0, 2\pi]$, regolare
   II) Rotazione attorno all'asse z:
   a) $S(x,t) = (x\cos t, x\sin t, e^{2x}), x \in [0,3]$, $t \in [0, 2\pi]$, non regolare in $(0,0,1)$
   b) $S(x,t) = (x\cos t, x\sin t, \sin(\pi x)), x \in [0, 1/2]$, $t \in [0, 2\pi]$, non regolare in $(0,0,0)$
   c) $S(x,t) = (x\cos t, x\sin t, 2/x), x \in [1,3]$, $t \in [0, 2\pi]$, regolare

4. Sia Σ la superficie grafico di $f(x,y) = e^{x^2 y} - y^2$, $|x+y| \leq 1, |x| \leq 1$. Scrivere una parametrizzazione di Σ e determinare il piano tangente nel punto corrispondente a $(0,0)$ e nel punto corrispondente a $(-1/2, 1)$.

   Risposte: a) $z = 1$ b) $e^{1/4}x + (2 - e^{1/4}/4)y + z = 1 + e^{1/4}/4$

5. Sia Σ la superficie parametrizzata da

$$\mathbf{S}(u,v) = (u+v, u-v, u^2 v), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

   Dopo aver stabilito che Σ è regolare, determinare il vettore normale nel punto $\mathbf{S}(1,0)$

   Risposta: $\underline{\mathrm{N}}$=(1, -1, -2)

Esercizi su Integrali di Superficie

1. Calcolare l'area della superficie ottenuta all'es.1 del precedente paragrafo.

   Risposta: $(1625\sqrt{13} - 37\sqrt{37})\pi/54$

2. Sia Σ una lamina materiale avente la forma della superficie di una semisfera di raggio R. In un sistema di riferimento cartesiano tale che Σ ha centro l'origine ed è contenuta nel semipiano $z \geq 0$, la sua densità superficiale è $\rho(x,y,z) = x^2 z$. Determinare la massa totale della lamina e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z.

   Risposte: a) $M = \pi R^5/4$ b) $I = \pi R^7/6$

3. Sia Σ la superficie di equazioni parametriche $\mathbf{S}(u,v) = (u+v, u-v, uv), (u,v) \in T$, dove $T = \{(u,v) : 1 \leq u^2 + v^2 \leq 9, u \leq 0 \leq v\}$. Calcolare

$$\iint_{\Sigma} x \, d\mathbf{S}$$

   utilizzando il cambiamento di coordinate nel piano $\varphi(u,v) = (u+v, v-u)$ e le simmetrie. A cosa corrisponde geometricamente tale cambiamento di coordinate?

   Risposte: a) $I = 0$ b) rotazione di $\pi/4$ in senso antiorario e cambio di scala