

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI A VALORI VETTORIALI

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, A aperto, $n, k \in \mathbb{N}$.

$$f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_k(\underline{x})) \quad \begin{cases} f_j = \text{componenti di } f \\ f_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

Esempi

• SUPERFICI in $\mathbb{R}^3$

$S: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($S: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ varietà n -dimensionale in $\mathbb{R}^k$, $n < k$)

• combiamenti di coordinate in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$)

• campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

$\underline{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o $\underline{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($\underline{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$)

GENERALITÀ

• Limiti. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\underline{L} \in \mathbb{R}^k$, $\underline{L} = (L_1, \dots, L_k)$

Si dice che $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{L}$ se $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underbrace{|f(\underline{x}) - \underline{L}|}_{\text{funzione da } \mathbb{R}^n \text{ in } \mathbb{R}} = 0$.

Proprietà:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{L} \Leftrightarrow \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f_j(\underline{x}) = L_j$$

(Limite componente per componente)

• Continuità. f è continua in $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ sse tutte le sue componenti sono continue in $\underline{x}_0$.

• Derivabilità. f è derivabile in $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ sse tutte le sue componenti sono derivabili in $\underline{x}_0$.

Quindi f è derivabile in $\underline{x}_0$ sse $\exists \nabla f_1(\underline{x}_0), \nabla f_2(\underline{x}_0) \dots \nabla f_k(\underline{x}_0)$.

Si definisce matrice JACOBIANA di f in $\underline{x}_0$:

$$\begin{matrix} \text{(matrice)} \\ \text{K} \times \text{n} \end{matrix} \quad J_f(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\underline{x}_0) \\ \nabla f_2(\underline{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_k(\underline{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x}_0), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\underline{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\underline{x}_0), & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\underline{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \end{pmatrix}$$

righe = gradienti delle componenti.

Allora, $\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$

$$J_f(\underline{x}_0) \underline{h} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\underline{x}_0) \cdot \underline{h} \\ \vdots \\ \nabla f_k(\underline{x}_0) \cdot \underline{h} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

← prodotto scalare

• Differenziabilità

f è differenziabile in $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ sse tutte le sue componenti sono differenziabili in $\underline{x}_0$: $\forall j=1 \dots k$ ← prodotto scalare

$$f_j(\underline{x}_0 + \underline{h}) = f_j(\underline{x}_0) + \nabla f_j(\underline{x}_0) \cdot \underline{h} + o(|\underline{h}|)$$

$$\Rightarrow \underline{f}(\underline{x}_0 + \underline{h}) = \underline{f}(\underline{x}_0) + J_f(\underline{x}_0) \underline{h} + o(|\underline{h}|) \quad \text{— in forma vettoriale —}$$

↑ prodotto tra matrici

Si definisce differenziale di f in $\underline{x}_0$ l'applicazione lineare:

$$\underline{df}_{\underline{x}_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \quad / \quad \underline{h} \rightarrow J_f(\underline{x}_0) \underline{h}$$

Possiamo quindi scrivere: f differenziabile in $\underline{x}_0$ se

$$\underline{f}(\underline{x}_0 + \underline{h}) = \underline{f}(\underline{x}_0) + \underline{df}_{\underline{x}_0}(\underline{h}) + o(|\underline{h}|)$$

SUPERFICI PARAMETRIZZATE in $\mathbb{R}^3$

$$S: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

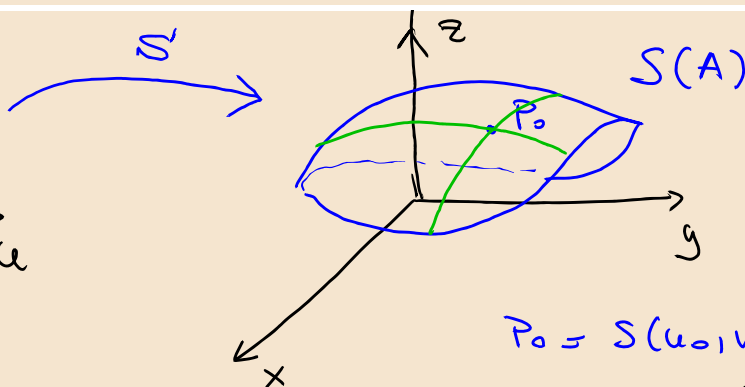
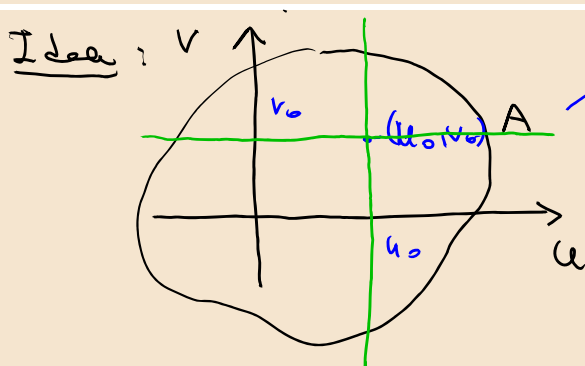
$$\underline{S(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad \forall (u,v) \in A.}$$

Def. Una superficie S si dice REGOLARE se:

1) S è differentiabile in A

2) $J_S(u,v)$ ha caratteristica (rango) massima (=2)
 $\forall (u,v) \in A.$

S è regolare se ammette piano tangente in ogni suo punto.



$$P_0 = S(u_0, v_0)$$

retta $u = u_0$ viene trasformata nelle curve: (sulle superficie)

$$\underline{r_1(v) = S(u_0, v)} \quad \text{passante per } P_0 : \underline{r_1(v_0) = S(u_0, v_0) = P_0}$$

retta $v = v_0$ viene trasformata nelle curve (sulle superficie)

$$\underline{r_2(u) = S(u, v_0)} \quad \text{passante per } P_0 : \underline{r_2(u_0) = S(u_0, v_0) = P_0}$$

I vettori tangenti alle due curve in P_0 sono $\underline{r_1'(v_0)}$ e $\underline{r_2'(u_0)}$.

Ma: $\underline{r}_1'(v) = S_v(u_0, v)$ e $\underline{r}_2'(u) = S_u(u, v_0) \Rightarrow$

$\underline{r}_1'(v_0) = S_v(u_0, v_0)$ e $\underline{r}_2'(u_0) = S_u(u_0, v_0)$

Tali vettori definiscono un piano = piano tangente sse
sono linearm. indipendenti $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} S_u(u_0, v_0) \\ S_v(u_0, v_0) \end{pmatrix}$ ha rango 2

Ricordando che:

$J_S(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} (u_0, v_0) \Leftrightarrow J_S(u_0, v_0)$ ha rango 2 (Trasposta)

Dunque: $\text{rank } J_S(u, v) = 2 \Leftrightarrow S_u, S_v$ lin. indipendenti
 (S_u, S_v vettori tangenti).

Poiché 2 vettori sono lin. indep. sse il loro prodotto vettoriale
 è non nullo $\Rightarrow \text{rank } J_S(u_0, v_0) = 2$ sse $S_u \wedge S_v \neq \underline{0}$.

$\underline{N}(u, v) = S_u(u, v) \wedge S_v(u, v)$ vettore normale alle superficie
 $\underline{N} \neq \underline{0}$. Il piano tangente a S in $P_0 = S(u_0, v_0)$ è dato da:

$\underline{N} \cdot (P - P_0) = 0$ dove $P = (x, y, z)$, $P_0 = S(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$

Posto $\underline{N} = (n_1, n_2, n_3)$

$\Rightarrow n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$

Piano
Tangente
in P_0

ESEMPIO

1) SUPERFICIE CARTESIANE

Dato $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, il grafico $G(f) = \{(x, y, z) : (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$ è una superficie regolare sse f è differenziabile.

Parametrizzazione $S(x, y) = (x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in A$.

S differenziabile sse f è differenziabile.

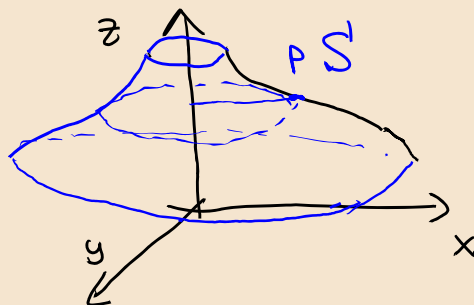
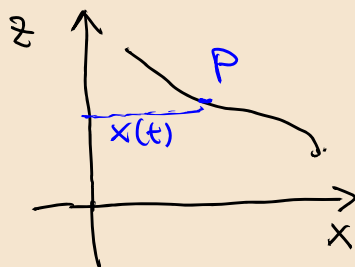
$S_x = (1, 0, f_x(x, y))$, $S_y = (0, 1, f_y(x, y))$, dunque:

$$\underline{N(x, y) = (S_x \wedge S_y)} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \underline{(-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)} \neq (0, 0, 0) \quad \text{sempre non nullo}$$

$\neq 0!$

2) SUPERFICIE DI ROTAZIONE

Date dalla rotazione di una curva piana = generatrice attorno ad una retta = asse di rotazione



$r(t) = (x(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, $x(t) \geq 0$ curva piana

ogni punto della curva descrive una circonferenza di raggio $x(t)$ (e quota costante)

$\Rightarrow$ parametrizzazione $S(t, \theta) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t))$,
 $t \in [a, b]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Analogamente se la rotazione è attorno all'asse x :

$$S(t, \theta) = (x(t), z(t) \sin \theta, z(t) \cos \theta), \quad t \in [a, b], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

le forme cartesiane:

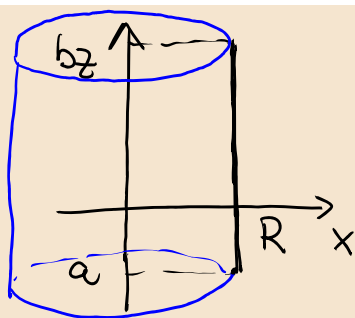
$$x^2 + y^2 = f^2(z) \quad \text{se rotazione attorno asse } z$$

$$y^2 + z^2 = f^2(x) \quad \text{" " " " } x$$

$$x^2 + z^2 = f^2(y) \quad \text{" " " " } y$$

Esempi.

1) CILINDRO (tronco di cilindro)



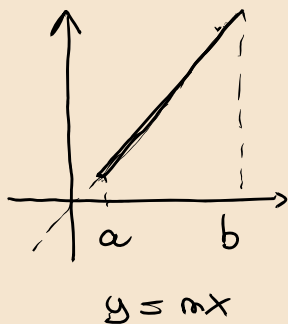
$$r(t) = (R, t), \quad t \in [a, b]$$

$$\Rightarrow S(t, \theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta, t), \quad t \in [a, b], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

eq. cartesiana:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

2) CONO (Tronco di)



$$r(t) = (t, mt), \quad t \in [a, b]$$

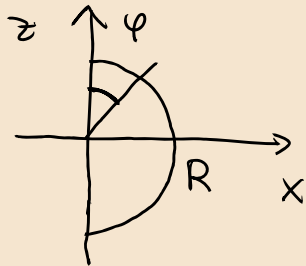
$$S(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, mt), \quad t \in [a, b], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

eq. cartesiana:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = t^2 \\ z = mt \Rightarrow t^2 = z^2 / m^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{z^2}{m^2}$$

$$m^2(x^2 + y^2) = z^2$$

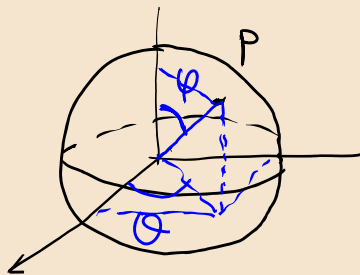
3) Sfera (superficie sferica)



$$r(\varphi) = (R \sin \varphi, R \cos \varphi), \quad \varphi \in [0, \pi]$$

$$\underline{S(\varphi, \theta) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi)}$$

$$\varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]$$



Eq. cartesiana:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \sin^2 \varphi = R^2 (1 - \cos^2 \varphi) \\ z^2 = R^2 \cos^2 \varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 - z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$