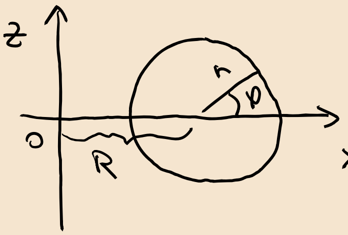
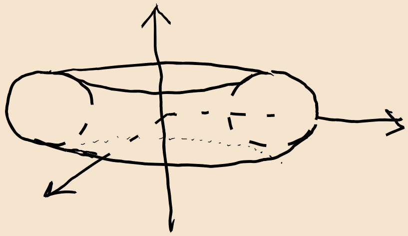
4) Toro (superficie del toro)



$R > r$

$\underline{r}(t) = (R + r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$

$\varphi \in [0, 2\pi]$



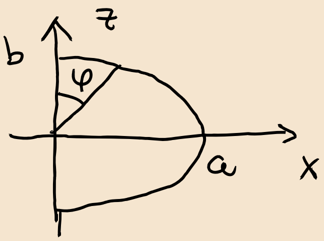
$S(\varphi, \theta) = ((R + r\cos\varphi)\cos\theta,\ (R + r\cos\varphi)\sin\theta,\ r\sin\varphi)$

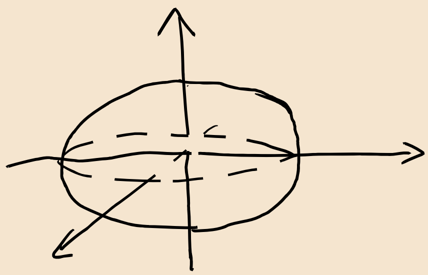
$\varphi \in [0, 2\pi],\ \theta \in [0, 2\pi]$

Eq. cartesiana: $x^2 + y^2 = (R + r\cos\varphi)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - R = r\cos\varphi$

$\Rightarrow\ z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 = r^2$

5) Ellissoide (superficie di un ellissoide)





$r(t) = (a\sin\varphi,\ b\cos\varphi),\ \varphi \in [0, \pi]$

superficie: $S(\varphi, \theta) = (a\sin\varphi\cos\theta,\ a\sin\varphi\sin\theta,\ b\cos\varphi)$

$\varphi \in [0, \pi],\ \theta \in [0, 2\pi]$

Eq. cartesiana: $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} = \sin^2\varphi,\ \dfrac{z^2}{b^2} = \cos^2\varphi \Rightarrow \dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$

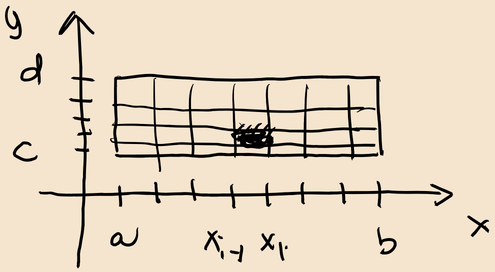
(se $a = b = R \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sfera)

Esercizio da fare: Sia S il toro ottenuto per rotazione della circonferenza $(x-3)^2+z^2=1$ attorno all'asse z. Determinare l'equazione del piano tangente a S in $P=\left(0,\frac{7}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
(Scrivere la parametrizzazione - trovare il valore di parametri (φ,θ) t.c. $S(\varphi,\theta)=P$ - Determinare la normale e quindi scrivere il piano tangente. Il risultato è:
$\underline{n}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ versore normale, piano tg: $y+z\sqrt{3}-5=0$)

INTEGRAZIONE MULTIPLA in $\mathbb{R}^2$

Sia $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, D chiuso e limitato, f limitata su D. Vogliamo definire:
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

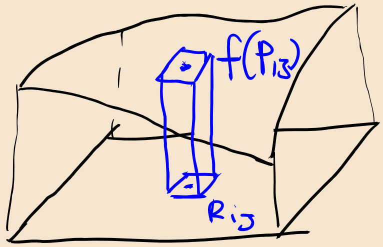
1) CASO PIÙ SEMPLICE: $D=[a,b]\times[c,d]$ rettangolo



Facciamo una partizione di $[a,b]$ e $[c,d]$ in n parti uguali:
$$x_0=a<x_1<\dots<x_n=b$$
$$y_0=c<y_1<\dots<y_n=d$$

$R_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ | $x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$, $y_j-y_{j-1}=\frac{d-c}{n}$, $i,j=1..n$

$\text{Area}(R_{ij}) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}$. Se $f \geq 0$ il volume sotteso dal grafico di f può essere approssimato dalla somma dei volumi dei parallelepipedi $\frac{(b-a)(d-c)}{n^2} f(P_{ij})$



$P_{ij} \in R_{ij}$ (rettangolino)

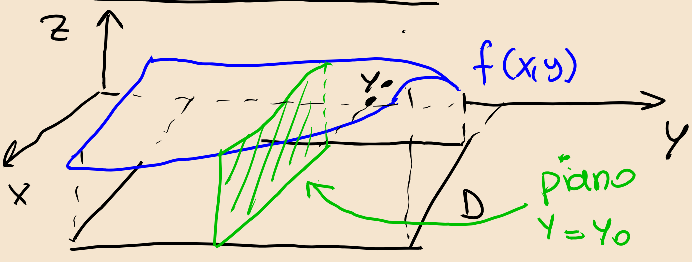
In generale, (f di segno qualunque) posso considerare le somme di Cauchy - Riemann:

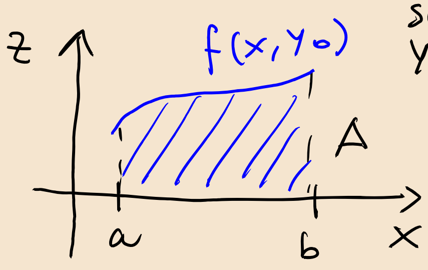
$$S_n = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} f(P_{ij}) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} f(P_{ij})$$

Def f si dice integrabile sul rettangolo D se $\lim_{n\to\infty} S_n$ esiste finito e indipendente dalla scelta di punti P_{ij}.

Teorema Se f è continua su $D = [a,b] \times [c,d]$, allora f è integrabile su D.

Idea del calcolo ($f \geq 0$)





sul piano $y = y_0$

$\text{Area}(A) = \int_a^b f(x, y_0)\,dx$

Allora il volume sotteso si può calcolare come "somma" delle aree A al variare di y tra c e d, cioè come integrale:

$$\iint_D f\,dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$$

Ovviamente lo stesso ragionamento può essere ripetuto fissando un piano $x = x_0$ → $\iint_D f\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$

Vale in generale per f di segno qualunque:

⇒ Se $D = [a,b] \times [c,d]$ e f è continua in D, allora:

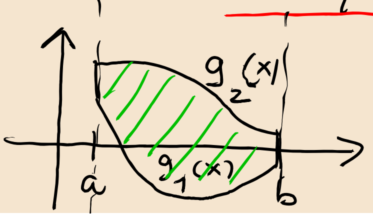
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$$

2) Insiemi più generali: INSIEMI REGOLARI

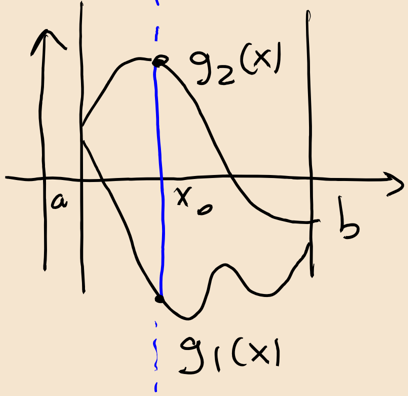
Si considerano insiemi con la seguente proprietà: presa una retta parallela ad uno degli assi che interseca l'insieme, allora l'intersezione è 1 unico intervallo:

Def. $D \subset \mathbb{R}^2$ si dice Y-SEMPLICE (o semplice rispetto alle verticale), se $\exists\ a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\exists\ g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue $g_1(x) \le g_2(x)$, t.c.

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}.$$



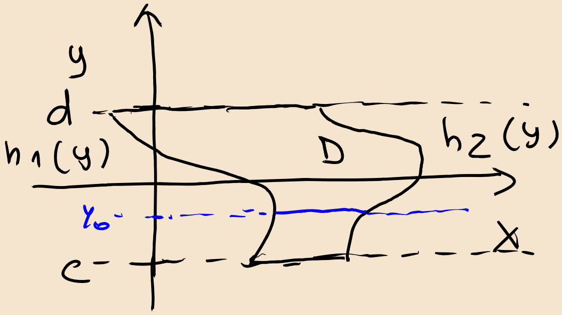
D = parte di piano compreso tra i grafici di g_1 e g_2 quando x varia tra a e b.



$\Rightarrow$ fissato $x_0 \in [a,b]$ la retta $x = x_0$ interseca D lungo 1 unico segmento $[g_1(x_0), g_2(x_0)]$

Def Un insieme D si dice **x-semplice** (o semplice rispetto all'orizzontale) se: $\exists\, c,d \in \mathbb{R}$, $c<d$, $\exists\, h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue, $h_1(y) \le h_2(y)$, t.c.

$$D = \{(x,y) : c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$



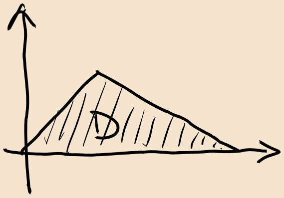
Fissato $y_0 \in [c,d]$ la retta $y = y_0$ interseca D secondo 1 unico intervallo

Def. Un insieme si dice **SEMPLICE** se è x-semplice oppure y-semplice.

Un insieme si dice **REGOLARE** se è unione finita di insiemi semplici.

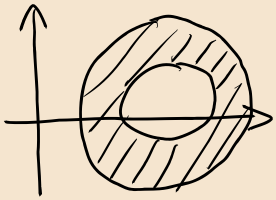
<u>Esempi</u>

1



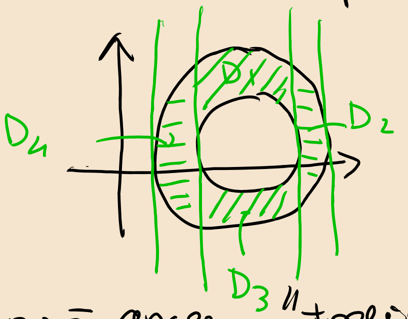
Sia x-semplice che y-semplice

2



non è né x-semplice né y-semplice

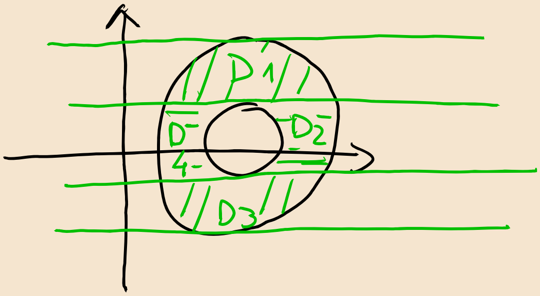
$\Rightarrow$ non è semplice. Però è regolare



$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

D_i y-semplice, $i = 1..4$

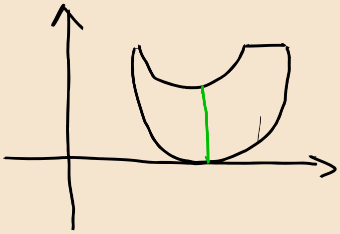
ovviamente si può anche "tagliare" con rette orizzontali $\longrightarrow$



$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

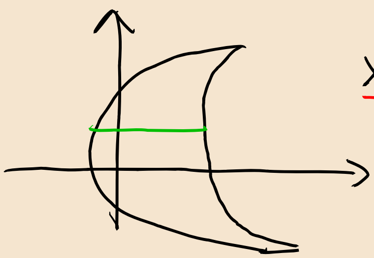
ognuno x-semplice

$\Rightarrow$ D regolare.



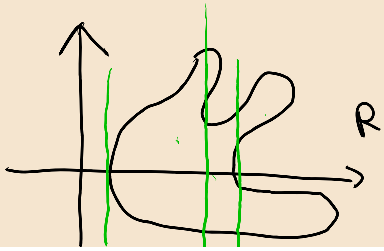
y-semplice

No x-semplice



x-semplice

No y-semplice

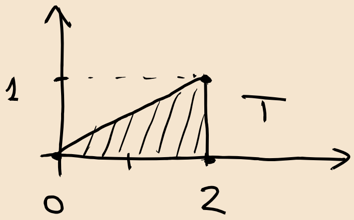


REGOLARE

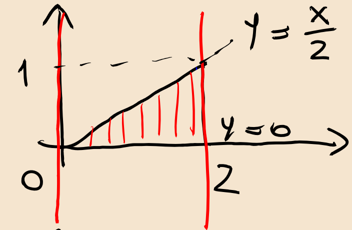
(unione di 5 insiemi y-semplici)

Esempi

1) sia T il Triangolo di vertici $(0,0),(2,0),(2,1)$

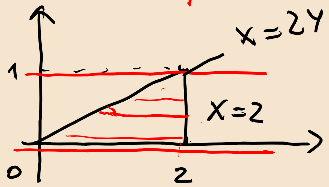


sia x-semplice, che y-semplice.



y-semplice:

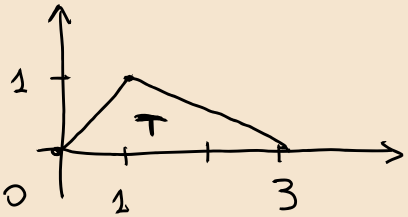
$$T = \left\{ (x,y) : 0 \le x \le 2 \,,\ 0 \le y \le \frac{x}{2} \right\}$$



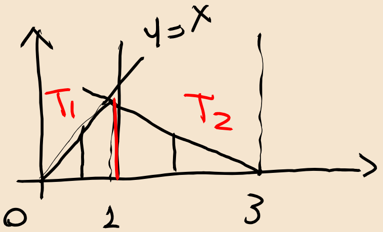
x-semplice:

$$T = \left\{ (x,y) : 0 \le y \le 1 \,,\ 2y \le x \le 2 \right\}$$

2) T triangolo di vertici $(0,0)$, $(3,0)$ $(1,1)$



sia y-semplice che x-semplice



$(3,0)$, $(1,1)$

$$\frac{y-0}{1-0} = \frac{x-3}{1-3}$$

retta $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

y-semplice

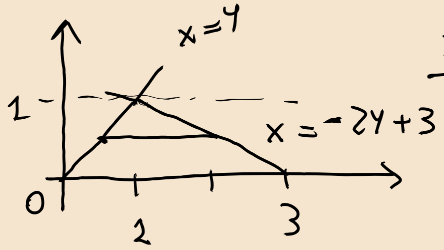
per semplicità vedo $T = T_1 \cup T_2$

$$T_1 = \left\{ (x,y) : 0 \le x \le 1 \,,\ 0 \le y \le x \right\}$$

$$T_2 = \left\{ (x,y) : 1 \le x \le 3 \,,\ 0 \le y \le -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \right\}$$

infatti la funzione continua $g_2(x)$ che delimita dall'alto l'insieme è:

$$g_2(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ -x/2 + 3/2 & \text{se } 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

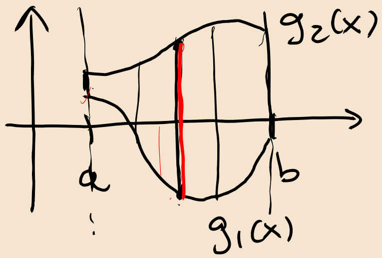


x - semplice

$$T=\{(x,y): 0\le y\le 1,\ y\le x\le -2y+3\}$$

FORMULE DI RIDUZIONE PER INSIEMI SEMPLICI

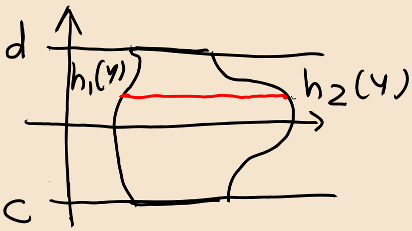
1) D y-semplice : $D=\{(x,y): a\le x\le b,\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$ Allora



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b \underbrace{\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right)}_{\text{integrale rispetto alla } y} dx$$

→ si integra prima rispetto a y e poi a x

2) D x-semplice : $D=\{(x,y): c\le y\le d,\ h_1(y)\le x\le h_2(y)\}$



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy$$

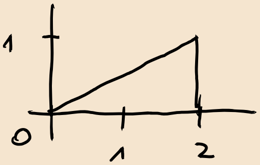
si integra prima rispetto a x e poi a y.

IMPORTANTE : Fondamentale è scrivere l'insieme di integrazione come x - semplice o y - semplice. ⇒

1° passo : disegnare l'insieme

2° passo : scrivere l'insieme come (unione di) insieme semplici.

Esercizio Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$.



Calcolare $\iint_T xy\,dx\,dy$.

T è sia x-semplice che y-semplice. Svolgiamo entrambi i calcoli

1) y-semplice: $T = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x/2\}$

$$\Rightarrow \iint_T xy\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{x/2} xy\,dy \right) dx = \int_0^2 \frac{xy^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=x/2} dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{2}\left(\frac{x^2}{4} - 0 \right) dx = \int_0^2 \frac{x^3}{8}\,dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

2) x-semplice: $T = \{(x,y) : 0 \le y \le 1,\ 2y \le x \le 2\}$

$$\Rightarrow \iint_T xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{2y}^2 xy\,dx \right) dy = \int_0^1 y\frac{x^2}{2}\Big|_{x=2y}^{x=2} dy = \int_0^1 (2y - 2y^3)\,dy$$

$$= \left[y^2 - \frac{2y^4}{4} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = 1/2 .$$

Se l'insieme, come in questo caso, è sia x-semplice che y-semplice, possiamo scegliere se integrare prima rispetto a x oppure prima rispetto a y. Può darsi che la difficoltà di calcolo non sia la stessa.