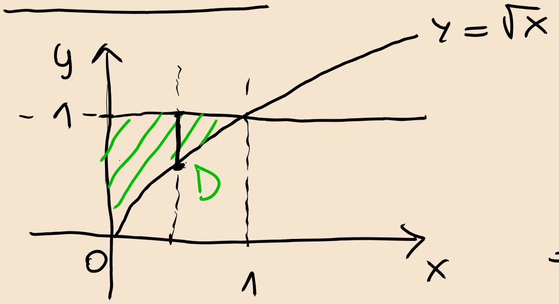
Esempio: importanza dell' ordine di integrazione

Sia $D$ la parte di piano compresa tra l'asse $y$, la retta $y=1$, e il grafico della funzione $y=\sqrt{x}$. Calcolare

$$\iint_D \sin(y^3)\,dx\,dy.$$

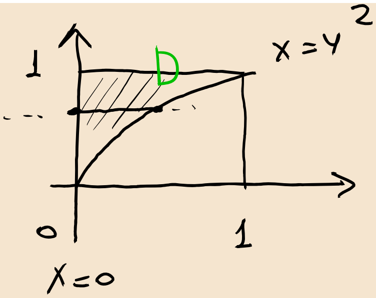



$D$ y-semplice

$$D=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ \sqrt{x}\le y\le 1\}$$

$$\Rightarrow \iint_D \sin(y^3)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sin(y^3)\,dy\right)dx$$

non sappiamo calcolarlo!




x-semplice

$$D=\{(x,y): 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y^2\}$$

$$\Rightarrow \iint_D \sin(y^3)\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{y^2}\sin(y^3)\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^1 \sin(y^3)\,[x]_0^{y^2}\,dy = \int_0^1 \sin(y^3)\,y^2\,dy$$

$$= -\frac{\cos(y^3)}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(-\cos 1+1\right) = \frac{1-\cos 1}{3}$$

**Def.** Un insieme $D\subset\mathbb{R}^2$ si dice MISURABILE se $f(x,y)\equiv 1$ è integrabile su $D$. La misura di $D$ = area di $D$ =

$$\text{Area}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy.$$

$\Rightarrow$ ogni insieme regolare è misurabile.

**Def** Un insieme misurabile si dice di misura nulla se

$$\iint_D 1\,dx\,dy = \text{Area}(D) = 0.$$

ES di insiemi di misura nulla in $\mathbb{R}^2$: $D = \{P\}$ punto, $D = \gamma$ = grafico di una funzione continua $g(x)$, $x \in [a,b]$, $D = \partial\Omega$ = frontiera di un insieme regolare ....

## Proprietà degli integrali doppi

Sia $D$ un insieme regolare, $f, g : D \to \mathbb{R}$ integrabili su $D$.

1) Linearità rispetto all'integrande:

$$\iint_D \left(c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)\right) dx\,dy = c_1 \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + c_2 \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2) Monotonia rispetto all'integrande

- Se $f \geq 0$ su $D \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$
- Se $f \geq g$ su $D \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$
- $\left| \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$ (perché $|f| \geq f$, $|f| \geq -f$)

3) Monotonia rispetto al dominio

Se $D_1 \subset D_2$, $D_1, D_2$ regolari, $f \geq 0$ su $D_2$, allora

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy \geq \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

4) Additività rispetto al dominio

Se $D = D_1 \cup D_2$, $\overset{\circ}{D_1} \cap \overset{\circ}{D_2} = \emptyset$ (interno disgiunto), allora

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

5) Annullamento

Se $D$ ha misura nulla $\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0 \quad \forall f$.

---

Teorema. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ regolare, e sia $f : D \to \mathbb{R}$ tale che:

i) $f$ continua su $D$

oppure

ii) limitata su $D$ e continua tranne un insieme di misura nulla

allora $f$ è integrabile su $D$

---

APPLICAZIONI degli integrali doppi. – Sia $D$ insieme regolare

$$\text{Area}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy.$$

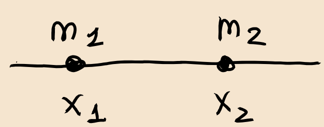
Se $D$ è la rappresentazione di una lamina piana (materiale) di densità $\rho(x,y) \geq 0$. Allora:

Massa $(D) = M = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$

centro di massa o baricentro: $P_0 = (x_G, y_G)$, dove:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M} \iint_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy \\[2ex] y_G = \dfrac{1}{M} \iint_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy \end{cases}$$

"Motivazione" (caso 2 punti materiali)




$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

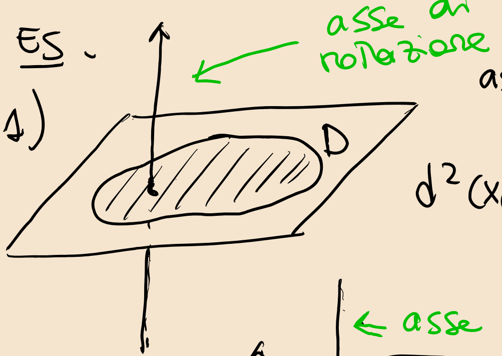
## Momento di inerzia rispetto ad un asse di rotazione

$$I = \iint_D d^2(x,y)\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

$d(x,y)$ = distanza di $(x,y)$ dall'asse di rotazione.

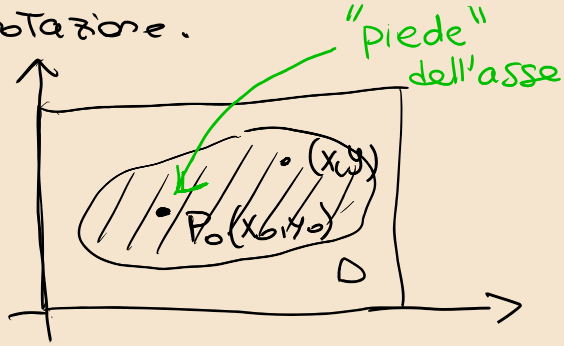
ES.

1)

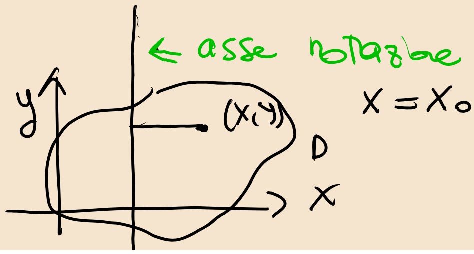



asse $\perp$ a D

$$d^2(x,y) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$$




2)




$x = x_0$

$$d^2(x,y) = (x-x_0)^2$$

Caso particolare: corpo omogeneo $\Rightarrow \rho(x,y) = \rho_0$ costante.

Allora: $M = \rho_0 \cdot \text{Area}(D)$

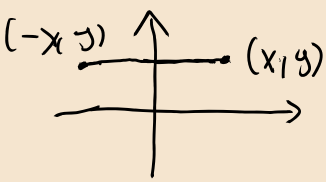
$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(D)} \iint_D x\,dx\,dy, \quad y_G = \frac{1}{\text{Area}(D)} \iint_D y\,dx\,dy$$

---

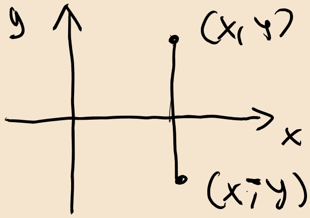
## SIMMETRIE nel piano

$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, biunivoca, t.c. $S(S(x,y)) = (x,y)$ e t.c. mantiene le distanze.

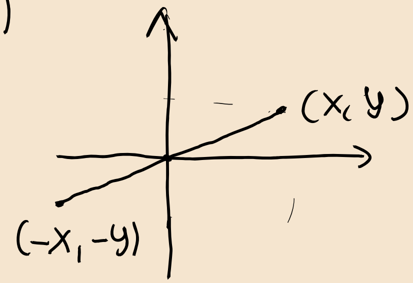
ES principali:




$S_1(x,y) = (-x,y)$ simmetria rispetto all'asse y

2) 


$S_2(x,y) = (x,-y)$ simmetria rispetto all'asse x

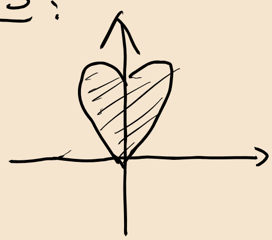
3) 


$S_3(x,y) = (-x,-y)$ simmetria risp. all'origine.

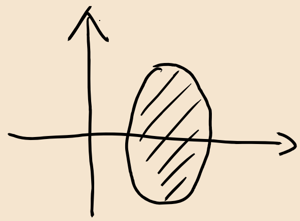
$S_3 = S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$. D si dice simmetrico rispetto alla simmetria $S$ se: $(x,y) \in D \iff S(x,y) \in D$, $\forall (x,y) \in D$.

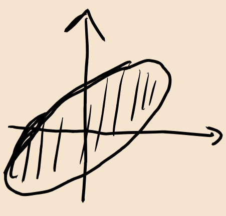
ES:



simmetrico risp. asse y



simmetrico risp. asse x



simmetrico risp. all'origine

**Def.** $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice

PARI rispetto alla simmetria $S$ se: $f(S(x,y)) = f(x,y)$

DISPARI " " " " $f(S(x,y)) = -f(x,y)$

ES: $f(x,y) = x$ dispari rispetto a $S_1$
pari rispetto a $S_2$
dispari rispetto a $S_3$

$f(x,y) = xy$ dispari rispetto a $S_1$
dispari rispetto a $S_2$
pari rispetto a $S_3$

$f(x,y) = x + y^2$ né pari né dispari risp. a $S_1$
pari rispetto a $S_2$

**Proprietà** Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ regolare, simmetrico rispetto alla simmetria $S$ e $f : D \to \mathbb{R}$ integrabile. Allora:

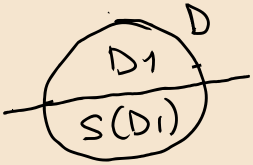
1) se $f$ è dispari rispetto alla simmetria $S$,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

2) se $f$ è pari rispetto alla simmetria $S$,

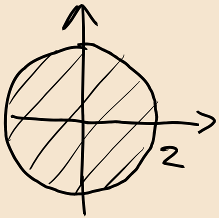
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 2 \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

dove $D = D_1 \cup S(D_1)$




Importante! occorre che il dominio D sia simmetrico rispetto a S

**ES:** $\iint_D (x+y^2)\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 4\}$



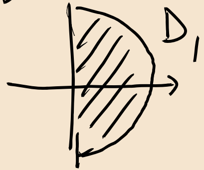

$f_1(x,y)=x$ dispari rispetto a $S(x,y)=(-x,y)$

$D$ è simmetrico rispetto a $S$.

$$\Rightarrow \iint_D (x+y^2)\,dx\,dy = 0 + \iint_D y^2\,dx\,dy$$

$f_2(x,y)=y^2$ pari rispetto a $S$ $\Rightarrow$

$$\iint_D (x+y^2)\,dx\,dy = 2\iint_{D_1} y^2\,dx\,dy$$




**ES** $\iint_D (x+y^3e^x)\,dx\,dy = 0$. Riflettere!!

per il primo integrando si usa $S_1$, per il secondo $S_2 \Rightarrow$ $\iint_D x\,dx\,dy=0$, $\iint_D y^3e^x\,dx\,dy=0$