CAMBIAMENTI DI COORDINATE in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Def. $T: A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^n$ è cambiamento di coordinate se è biunivoca cioè globalmente invertibile su A

$n = 1$. Se $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R})$ è di classe C^1 e $\varphi' \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $(\forall t \in A)$ $\Rightarrow$ φ invertibile globalmente.

$n \geq 2$ & $T: A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 e $\det J_T \neq 0$ in ogni punto di A allora T è localmente invertibile cioè $\forall \underline{x}_0 \in A$ $\exists$ intorno U di $\underline{x}_0$ t.c. $T: U \to T(U)$ biunivoca.

ES. in $\mathbb{R}^2$: COORDINATE POLARI

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad T(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

$$J_T(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_T(\rho,\theta) = \rho \neq 0$$

se $\rho \neq 0$

$T: \underbrace{\mathbb{R}^2 - \{\rho = 0\} \to \mathbb{R}^2}$,

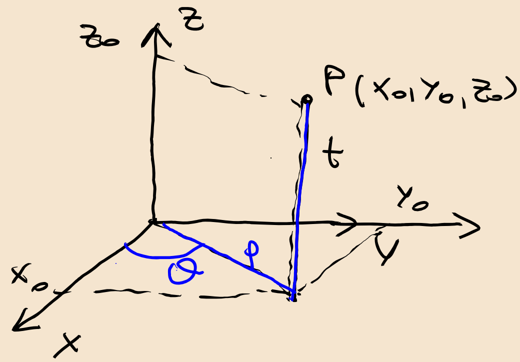
Non è biunivoca

$$\boxed{\underbrace{T: (0,\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}}_{\text{È BIUNIVOCA}}}$$

ES. in $\mathbb{R}^3$

1) COORDINATE CILINDRICHE

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases} \qquad T: (\rho,\theta,t) \to (x,y,z)$$



$$|\det J_T(\rho,\theta,t)| = \rho \qquad \neq 0 \text{ se } \rho \neq 0$$

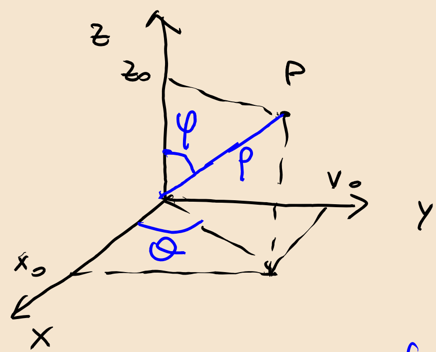
$\rho = \rho_0$ costante $\to$ cilindro illimitato.

Biunivoca se

$$T: (0,\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 - \{\text{asse } z\}$$

2) COORDINATE SFERICHE

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad T: (\rho,\varphi,\theta) \to (x,y,z)$$



$$|\det J_T(\rho,\varphi,\theta)| = \rho^2\sin\varphi$$

$\rho = \rho_0$ costante $\to$ sfere

Biunivoca se:

$$T: (0,\infty) \times (0,\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 - \{\text{asse } z\}$$

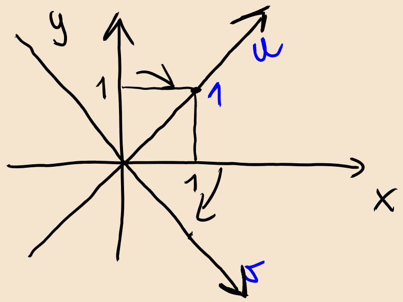
Esercizio

Stabilire se $T(u,v) = (u+v, u-v)$ è un cambiamento di coordinate in $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases} \qquad T \in C^1(\mathbb{R}^2) \qquad J_T(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\det J_T(u,v)| = 2$$

Provo a invertire: $u = (x+y)/2$, $v = (x-y)/2$

L'inversa esiste $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow$ Biunivoca su tutto $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ è un cambiamento di coordinate in tutto $\mathbb{R}^2$.



rotazione + cambiamento di scala

$|\det J_T(u,v)| = 2$ dà il cambio di scala, cioè esprime il fattore di scala delle aree

Area $= 1$ in $(x,y) \rightarrow$ Area $= \frac{1}{2}$ in (u,v)

$$\rightarrow |\det J_T(u,v)| \cdot \text{Area}(\text{in } (u,v)) = \text{Area}(\text{in } (x,y))$$

CAMBIAMENTO DI COORDINATE negli integrali doppi

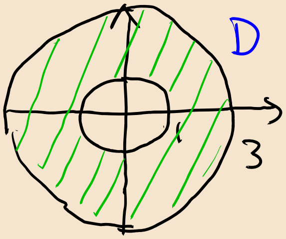
Sia D un insieme regolare $\subset \mathbb{R}^2$, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile, $T : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow B \subset \mathbb{R}^2$ un cambiamento di coordinate.

Allora:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,\underbrace{dx\,dy}_{\substack{\text{area} \\ \text{infinitesima in } (x,y)}} = \iint_E f(T(u,v))\,\underbrace{|\det J_T(u,v)|\,du\,dv}_{\substack{\text{aree infinitesime} \\ \text{in } (u,v)}}}$$

E t.c. $\boxed{T(E) = D}$

Esempio. Calcolare $\iint_D x^2\,dx\,dy$, $\quad D=\{(x,y): 1\le x^2+y^2\le 9\}$

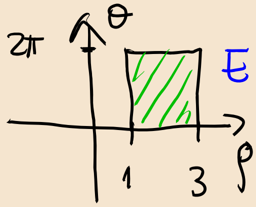


in coordinate polari: $E=\{(\rho,\theta): 1\le\rho\le 3,\ \theta\in[0,2\pi]\}$

E / $T(E)=D$.

$|\det J_T|$

$$\Rightarrow \iint_D x^2\,dx\,dy = \iint_E \rho^2\cos^2\theta \cdot \rho \cdot d\rho\, d\theta =$$



$$= \int_1^3 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3\cos^2\theta\, d\theta\right) d\rho =$$

$$= \int_1^3 \rho^3\, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^3 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2\theta)}{2}+\theta\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{81-1}{4}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi = 20\pi.$$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos^2\theta = \dfrac{\cos 2\theta + 1}{2}$

Fare: $\iint_D x^2 y\,dx\,dy \qquad D=\{1\le x^2+y^2\le 4,\ \ y\ge |x|\}$ $\qquad$ R: $\dfrac{31\sqrt{2}}{30}$

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \quad D=\left\{(\rho,\theta): 0\le\theta\le \frac{3\pi}{2},\ \rho\le\theta\right\}$$

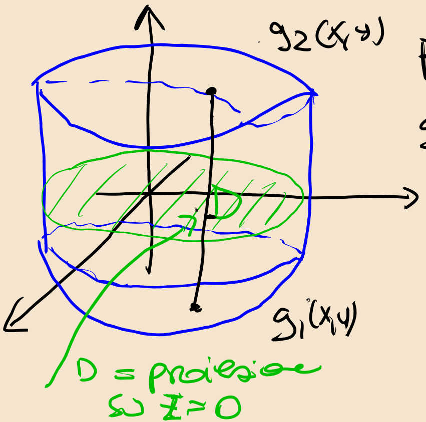
R: $\dfrac{9\pi^2}{8}-\dfrac{1}{2}$

INTEGRALI TRIPLI

1) Integrazione "per fili"

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\}$

D ins. regolare in $\mathbb{R}^2$, $g_1, g_2 : D \to \mathbb{R}$, continue, $g_1 \le g_2 \; \forall (x,y)$



Parte di spazio compresa tra i grafici di g_1 e g_2.

Allora, $\forall f$ continua su Ω:

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy}$$