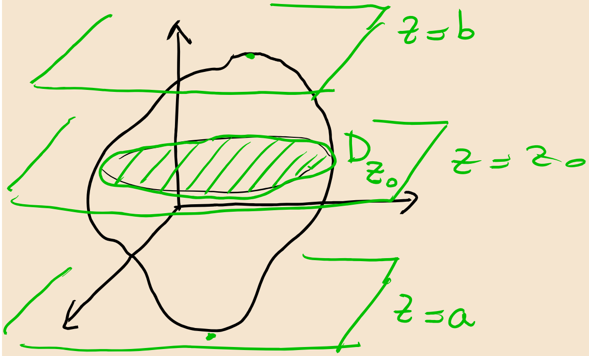
2) INTEGRAZIONE "PER STRATI"



$D_{z_0} = \Omega \cap \{z=z_0\}$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ t.c.

$\Omega = \{(x,y,z) : a \le z \le b,\ (x,y) \in D_z\}$

$D_z \subset \mathbb{R}^2$, D_z regolare.

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua, allora

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

Per gli integrali tripli (per fili e per fette) valgono tutte le proprietà viste per gli integrali doppi: linearità, monotonia, additività, ecc..

Cambiamento di coordinate negli integrali tripli

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (t.c. si possa fare integrazione per fili o per strati), e sia $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un cambiamento di coordinate. Allora:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega_1} f(T(u,v,w))\,|\det J_T(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

$T(\Omega_1) = \Omega$, $(x,y,z) = T(u,v,w)$

ES

$|\det J_T|$

Coordinate cilindriche : $dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dt$

coordinate sferiche : $dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

Applicazioni:

- $\iiint_\Omega 1\,dxdydz = \text{misura}(\Omega) = $ VOLUME di Ω.

Se $\rho = \rho(x,y,z)$ è la densità di massa di Ω, $(\rho \geq 0)$, allora

- $M = \iiint_\Omega \rho\, dxdydz$ massa

- $\begin{cases} x_G = 1/M \iiint_\Omega \rho\, x\, dxdydz \\ y_G = 1/M \iiint_\Omega \rho\, y\, dxdydz \\ z_G = 1/M \iiint_\Omega \rho\, z\, dxdydz \end{cases}$ coordinate baricentro

- $I = \iiint_\Omega d^2(x,y,z)\,\rho\, dxdydz$ momento d'inerzia

d = distanza dall'asse di rotazione. Es: $d^2(x,y,z) = x^2+y^2$ se

l'asse di rotazione è l'asse z = distanza al quadrato dall'asse z.
Se asse rotazione = asse x $\Rightarrow d^2 = y^2+z^2$, se è l'asse y $\Rightarrow$
$d^2 = x^2+z^2$.

Esercizio Calcolare la massa del cono $x^2+y^2 \leq (1-z)^2$, $0 \leq z \leq 1$ se la densità è $\rho(x,y,z) = z$.

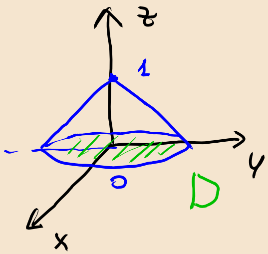
Per strati: $\Omega = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 1, \underbrace{x^2+y^2 \leq (1-z)^2}_{D_z}\}$

$$\Rightarrow M = \iiint_\Omega \rho\, dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} z\, dxdy\right) dz = \int_0^1 z \left(\iint_{D_z} 1\, dxdy\right) dz =$$

$$= \int_0^1 z \cdot \text{Area}(D_z)\,dz = \int_0^1 z\cdot \pi (1-z)^2\,dz = \pi \int_0^1 (z^3 - 2z^2 + z)\,dz$$

$$= \pi \left(\frac{z^4}{4} - \frac{2}{3}z^3 + \frac{z^2}{2}\right)_0^1 = \pi\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{12}(3 - 8 + 6) = \frac{\pi}{12}.$$

Altro metodo: integrale per fili.

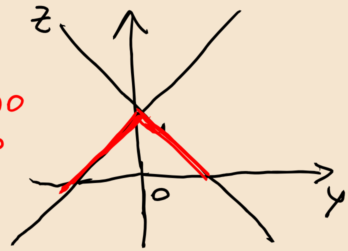


Solido di rotazione attorno asse z

$$x^2+y^2 \le (1-z)^2$$

$$(x^2+y^2 \le f(z),\ f \ge 0)$$

piano $x=0$



$$\Rightarrow y^2 \le (1-z)^2, \quad 0 \le z \le 1$$

$$(1-z)^2 = y^2$$

$$1 - z = \pm y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 1+y \\ z = 1-y \end{cases} \quad 0 \le z \le 1$$

superficie del cono: $(x^2+y^2) = (1-z)^2 \Rightarrow 1-z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ perciò

$0 \le z \le 1 \Rightarrow z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ sup. cono come grafico

$$\Rightarrow \Omega = \{(x,y,z) : \underbrace{x^2+y^2 \le 1}_{D},\ 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$$

D = proiezione di Ω su $z=0$

$$\Rightarrow M = \iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz\right)dx\,dy = \iint_D \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy$$

$$= \iint_D \frac{1}{2}\left(1 + x^2+y^2 - 2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy = \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\rho^2-2\rho)\,\rho\,d\theta\,d\rho$$

coord. polari

$|\det J_T|$

$$= \pi \int_0^1 (\rho + \rho^3 - 2\rho^2)\,d\rho = \frac{\pi}{12}$$

Esercizio: Volume di un solido di rotazione

$x^2+y^2 \le f(z)$, $(f \geq 0)$, $z \in [a,b]$.

Per strati:

D_z = cerchio di raggio $R = \sqrt{f(z)}$.

$$\Omega = \{(x,y,z) : a \le z \le b, \underbrace{x^2+y^2 \le f(z)}\}$$

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\, dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} 1\, dx dy \right) dz = \int_a^b \text{Area}(D_z) dz$$

$$= \pi \int_a^b f(z) dz.$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_a^b f(z) dz$$

INCISO: CALCOLO DI UN PRODOTTO VETTORIALE.

Siano $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Il prodotto vettoriale $\underline{v} \wedge \underline{w}$ si può calcolare formalmente mediante un determinante.

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2 w_3 - v_3 w_2)\underline{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\underline{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\underline{k}$$

cioè: $(v_1, v_2, v_3) \wedge (w_1, w_2, w_3) = (v_2 w_3 - v_3 w_2,\ v_3 w_1 - v_1 w_3,\ v_1 w_2 - v_2 w_1)$

CAMPI VETTORIALI

Un campo vettoriale è una applicazione $\underline{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $n \geq 1$, $m \geq 1$. Esso associa ad ogni elemento di Ω = punto nello spazio o spazio/tempo un vettore di $\mathbb{R}^m$.

Se il campo non dipende dalla variabile t = tempo ⇒ campo stazionario.

Se $m = 1$ ⇒ campo scalare.

Casi che consideriamo: campi stazionari in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

$\underline{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

OPERATORI DIFFERENZIALI: ROTORE e DIVERGENZA

Sia $\underline{F}$ un campo $C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\underline{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $F_i : \Omega \to \mathbb{R}$.

Def. Il rotore di F è il campo vettoriale:

$$\text{rot}\, \underline{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\underline{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\underline{k}$$

Formalmente, si può introdurre l'operatore NABLA

∇ = operatore gradiente ⇒ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Allora:

$$\boxed{\text{rot}\, \underline{F} = \nabla \wedge \underline{F}} \Rightarrow \text{rot}\, \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Il rotore indica la capacità del campo di mettere in rotazione un corpo immerso, cioè indica la VORTICOSITÀ del campo.
Se rot $\underline{F} = \underline{0}$ $\forall (x,y,z) \in \Omega \Rightarrow$ campo IRROTAZIONALE.

Def. La divergenza di F è il campo scalare

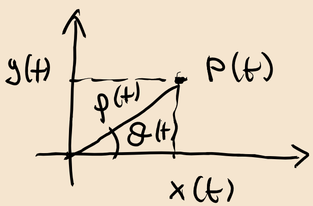
$$\operatorname{div} \underline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Formalmente:

$$\boxed{\operatorname{div} \underline{F} = \nabla \cdot \underline{F}}$$

La divergenza indica la presenza di sorgenti o di pozzi del campo. Se $\operatorname{div} \underline{F} = 0$ $\forall (x,y,z) \in \Omega \rightarrow$ campo SOLENOIDALE

Esempio: campo di velocità del moto rotatorio uniforme.

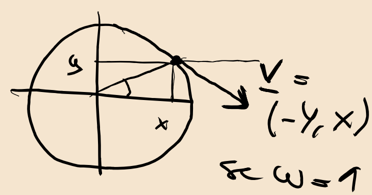


$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos(\theta(t)) \\ y(t) = \rho(t) \sin(\theta(t)) \end{cases}$$

Moto rotatorio: $\rho(t) =$ costante $= R$
uniforme: $\dot{\theta} =$ costante $= \omega$ velocità angolare
$\Rightarrow \theta(t) = \omega t$ (se $\theta(0) = 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \end{cases} \quad \text{eq. di moto.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = -R\omega \sin(\omega t) = -\omega y \\ y' = R\omega \cos(\omega t) = \omega x \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad \underline{V} = (-\omega y, \omega x)$$

OSS. Se $\underline{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \underline{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$

allora:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{rot } \underline{F} &= \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\ \text{div } \underline{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}. \end{aligned}}$$

lungo $\underline{k}$

campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

- Per l'esercizio precedente

$$\text{rot } \underline{V} = 2\omega \underline{k} \Rightarrow \frac{1}{2} |\text{rot } \underline{V}| = \omega \quad \text{velocità angolare}$$