# Identità differenziali

Siano $\underline{F}$, $u$ un campo vettoriale e un campo scalare di classe $C^2(\Omega)$, $\Omega$ aperto $\subset \mathbb{R}^3$. Allora:

- $\mathrm{rot}(\nabla u) = \underline{0}$ $\Rightarrow$ il gradiente è un campo irrotazionale
- $\mathrm{div}(\nabla u) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \Delta u$ ($\Delta$ = operatore di Laplace)
- $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\underline{F}) = 0$ $\Rightarrow$ il rotore è un campo solenoidale

Dim Basta fare i calcoli e tenere conto che $u, \underline{F} \in C^2$ dunque vale il teo. di Schwartz: $u_{xy} = u_{yx}$ ----

Formalmente:

$$\mathrm{rot}(\nabla u) = \nabla \wedge (\nabla u) = (\nabla \wedge \nabla) u = 0$$

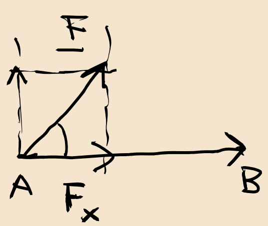
$$\mathrm{div}(\nabla u) = \nabla \cdot (\nabla u) = (\nabla \cdot \nabla) u = \nabla^2 u = \Delta u$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\underline{F}) = \nabla \cdot (\nabla \wedge F) = 0$$

---

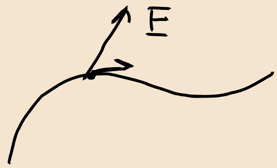
# LAVORO DI UN CAMPO (di Forze)

caso più semplice: $\underline{F}$ costante, spostamento rettilineo.




$$L = \underline{F} \cdot (B - A)$$

In generale:




Lavoro infinitesimo: $dL = \underline{F} \cdot d\underline{P}$

$d\underline{P}$ = spostamento infinitesimo $= (dx, dy, dz)$.

Allora, se $\gamma$ è il sostegno di una curva regolare $\underline{r}(t)$, $t \in [a,b]$, si definisce lavoro del campo F lungo $\gamma$:

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{P} = \int_a^b \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)\, dt$$

In componenti:

$d\underline{P} = \underline{r}'(t)dt$

$$\int_\gamma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot r'(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \left[ F_1(\underline{r}(t)) x'(t) + F_2(\underline{r}(t)) y'(t) + F_3(\underline{r}(t)) z'(t) \right] dt$$

---

Questo tipo di integrale di linea si chiama integrale di LINEA DI SECONDA SPECIE.

- $\int_\gamma f(x,y,z)\, ds$ 1° specie, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
- $\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{P} = \int_\gamma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ 2° specie, $\underline{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

---

Se $\gamma$ è regolare a tratti, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, ($\gamma_i$ regolari), allora: $L_\gamma(\underline{F}) = L_{\gamma_1}(\underline{F}) + L_{\gamma_2}(\underline{F})$.

- L'integrale di linea di 2° specie è indipendente dalla parametrizzazione della curva ma dipende solo dal verso di percorrenza. Se il verso si mantiene allora l'integrale non cambia, se il verso si inverte allora l'integrale cambia segno

$$\Rightarrow \quad L_{-\gamma}(\underline{F}) = -L_{\gamma}(\underline{F}) \qquad (-\gamma = \text{curva } \gamma \text{ percorsa in senso opposto})$$

---

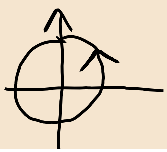
Esercizio Sia $V=(-y,x)$. Calcolare il lavoro se:

1) $\gamma$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, percorsa in senso antiorario.

2) $\gamma$ è l'arco di spirale $\rho=\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$.

---

1) $\underline{r}(t)=(\cos t, \sin t)$, $t\in[0,2\pi]$



$$\Rightarrow \underline{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$L_\gamma(\underline{F}) = \int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy = \int_0^{2\pi} \overbrace{(-\sin t, \cos t)}^{\underline{F}(\underline{r}(t))} \cdot \overbrace{(-\sin t, \cos t)}^{\underline{r}'(t)}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.$$

OSS. se circonferenza percorsa in senso orario non si cambia parametrizzazione: $L_{-\gamma} = -L_\gamma$

2) $\rho=\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$ $\Rightarrow \underline{r}(\theta) = (\theta\cos\theta, \theta\sin\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$

$$\Rightarrow \underline{r}'(\theta) = (\cos\theta - \theta\sin\theta, \sin\theta + \theta\cos\theta)$$

$$\Rightarrow L_\gamma(\underline{F}) = \int_0^{2\pi} (-\theta\sin\theta, \theta\cos\theta)\cdot(\cos\theta - \theta\sin\theta, \sin\theta+\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cancel{-\theta\sin\theta\cos\theta} + \theta^2\sin^2\theta + \cancel{\theta\cos\theta\sin\theta} + \theta^2\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \theta^2\,d\theta = \frac{\theta^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^3.$$

[ osservazione: è la stessa cosa di $\int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy =$

$$= \int_0^{2\pi} [\underbrace{-\theta\sin\theta}_{F_1(\underline{r}(t))}(\underbrace{\cos\theta - \theta\sin\theta}_{x'(t)}) + \underbrace{\theta\cos\theta}_{F_2(\underline{r}(t))}(\underbrace{\sin\theta+\theta\cos\theta}_{y'(t)})]\,d\theta$$ ]

osservazione: se $\gamma$ è una curva chiusa allora il lavoro del campo lungo $\gamma$ si dice anche CIRCUITAZIONE del campo lungo $\gamma$. Si indica con un circoletto sul simbolo di integrale

$$\oint_\gamma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

---

## CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI

Def. Un campo $\underline{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$, $F \in C^1(\Omega)$ si dice conservativo se esiste una funzione $U: \Omega \to \mathbb{R}$ $U \in C^2(\Omega)$ t.c. $\boxed{\nabla U = \underline{F}}$. $U$ si dice POTENZIALE

$-U = V$ energia potenziale

In un corpo in moto sotto l'azione di un campo conservativo L'energia Totale si conserva:

$$E_{TOT} = E_{CIN} + E_p$$

$$\begin{cases} E_{CIN} = \frac{1}{2} m |v|^2 & \text{cinetica} \\ E_p = -U & \text{en. potenziale} \end{cases}$$

Sia $\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e' equaz. di moto del punto.

$\Rightarrow \underline{v} = \underline{r}'(t)$, $|v|^2 = \underline{r}' \cdot \underline{r}'$, $\underline{a} = \underline{r}''(t)$

$\Rightarrow E_T = \frac{1}{2} m \underline{r}'(t) \cdot \underline{r}'(t) - U(\underline{r}(t)) = E(t)$ funzione del Tempo

$\Rightarrow E'(t) = \frac{1}{2} m \; \underline{r}''(t) \cdot \underline{r}'(t) + \frac{1}{2} m \; \underline{r}'(t) \cdot \underline{r}''(t) - \nabla U(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)$

$= m \; \underline{r}''(t) \cdot \underline{r}'(t) - \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) = 0$ $\quad (\underline{F} = m\underline{a})$

$E'(t) = 0 \Rightarrow E(t) =$ costante Energia totale non varia nel tempo

**Lemma** Sia $\underline{F} = \nabla U$ un campo conservativo in $\Omega$, e sia $\gamma$ regolare (a tratti) contenuta in $\Omega$, con parametrizzazione $\underline{r}(t)$, $t \in [a,b]$. Sia $P_i = \underline{r}(a)$, $P_f = \underline{r}(b)$. Allora:

$$L_\gamma(\underline{F}) = U(P_f) - U(P_i)$$

$\Rightarrow$ indipendenza dal percorso: dipende solo dal punto iniziale e finale.

$\Rightarrow$ se la curva è chiusa $\Rightarrow P_i = P_f \Rightarrow L_\gamma(\underline{F}) = 0$.

Dim: Sia $\gamma$ regolare. Allora:

$$L_\gamma(\underline{F}) = \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{P} = \int_a^b \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)\,dt = \int_a^b \nabla U(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} U(\underline{r}(t))\,dt = U(\underline{r}(t))\Big]_{t=a}^{t=b} = U(\underline{r}(b)) - U(\underline{r}(a)) =$$

$$= U(P_f) - U(P_i).$$

Ricordare che: Derivazione di funzioni composte

$U: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

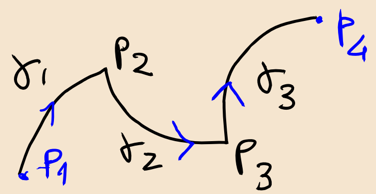
$\underline{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$

$U(\underline{r}(t))$ = funz. composta

$\Rightarrow \frac{d}{dt} U(\underline{r}(t)) = \nabla U(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)$

prodotto scalare.

- Se $\gamma$ è regolare a tratti, basta ripeterlo per ogni tratto regolare.




Es: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \Rightarrow L_\gamma = L_{\gamma_1}(\underline{F}) + L_{\gamma_2}(\underline{F}) + L_{\gamma_3}(\underline{F})$

$= U(\cancel{P_2}) - U(P_1) + U(\cancel{P_3}) - U(\cancel{P_2}) + U(P_4) - U(\cancel{P_3}) =$

$= U(P_4) - U(P_1)$