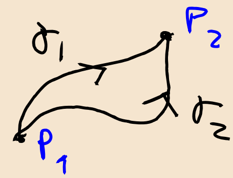
CARATTERIZZAZIONE DEI CAMPI CONSERVATIVI

Teorema. Sia $\underline{F} \in C^1(\Omega)$, Ω aperto connesso. Allora sono equivalenti:

1) Se γ_1 e γ_2 sono due curve regolari (a tratti) con stesso punto iniziale e finale, allora $L_{\gamma_1}(\underline{F}) = L_{\gamma_2}(\underline{F})$

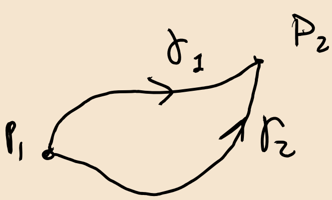


2) Se γ regolare (a tratti) semplice e chiusa, allora $L_\gamma(\underline{F}) = 0$

3) Esiste $U \in C^2(\Omega)$ t.c. $\nabla U = \underline{F}$.

Dim. 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 3)

- 3) $\Rightarrow$ 2) già visto. ($L = U(P_f) - U(P_i)$, $P_f = P_i \Rightarrow L = 0$)
- 2) $\Rightarrow$ 1) Siano γ_1, γ_2 con stesso punto iniziale e finale.



$\Rightarrow \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ è curva chiusa $\Rightarrow$

$\Rightarrow L_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} = 0$

Ma $L_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} = L_{\gamma_1} + L_{-\gamma_2} = L_{\gamma_1} - L_{\gamma_2}$

$\Rightarrow L_{\gamma_1}(\underline{F}) - L_{\gamma_2}(\underline{F}) = 0.$

- 1) $\Rightarrow$ 3) Dimostrazione costruttiva.

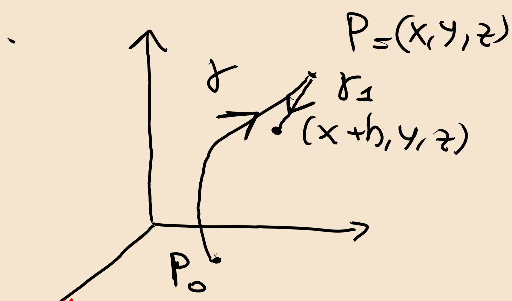
Fissiamo $P_0 \in \Omega$ e sia $P = (x, y, z)$ e definisco

$U(x, y, z) = L_\gamma(\underline{F})$, γ curva regolare (a tratti) da P_0 a P

È buona def. perché per ipotesi il lavoro dipende solo dai punti iniziali e finali e non dalla curva.

Dobbiamo dimostrare che $\nabla U = \underline{F}$ cioè $U_x(x,y,z) = F_1(x,y,z)$, e analoghe le altre componenti. ($U_y = F_2$, $U_z = F_3$).

$$U_x(x,y,z) = \lim_{h\to 0} \frac{U(x+h,y,z) - U(x,y,z)}{h}.$$



$$U(x+h,y,z) = L_\gamma(\underline{F}) + L_{\gamma_1}(\underline{F}) \left(= L_{\underbrace{\gamma\cup\gamma_1}_{\text{curva da } P_0 \text{ a } (x+h,y,z)}}(\underline{F})\right)$$

$$= U(x,y,z) + L_{\gamma_1}(\underline{F})$$

"Per andare da P_0 a $(x+h,y,z)$ scelgo di passare da P"

$\gamma_1 : \underline{r}_1(t) = (x+t, y, z)$, $0 \le t \le h$

$\underline{r}_1'(t) = (1,0,0)$

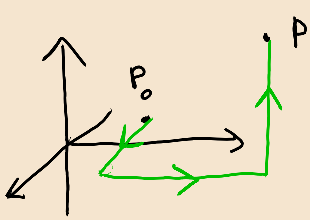
$$\Rightarrow U(x+h,y,z) - U(x,y,z) = L_{\gamma_1}(\underline{F}) = \int_0^h F_1(x+t,y,z)\,dt.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_0^h F_1(x+t,y,z)\,dt}{h} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{F_1(x+h,y,z)}{1} =$$

$$= F_1(x,y,z).$$

Metodo per il calcolo del potenziale:

$U(x,y,z) = L_\gamma(\underline{F})$ dove γ è ad esempio una spezzata parallela agli assi da un punto P_0 fissato a $P = (x,y,z)$



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

- **Osservazione 1.** Se esiste una curva chiusa, semplice, regolare (a tratti) t.c. $L_\gamma(\underline{F}) \neq 0 \Rightarrow \underline{F}$ NON è conservativo.

- **osservazione 2.** Se $\underline{F}$ è conservativo $\Rightarrow \underline{F} = \nabla U$ e dunque $\text{rot}\,\underline{F} = \text{rot}(\nabla U) = \underline{0} \Rightarrow$ un campo conservativo è sempre irrotazionale. $\Rightarrow$ se $\text{rot}\,\underline{F} \neq \underline{0}$ in tutto Ω allora $\underline{F}$ non è conservativo.

Non vale il viceversa: può essere $\text{rot}\,\underline{F} = \underline{0}$ $\forall$ punto di Ω ma $\underline{F}$ non conservativo in Ω. (condizione non sufficiente)

Esempio: $\underline{F}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ ha rotore nullo ma non è conservativo in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

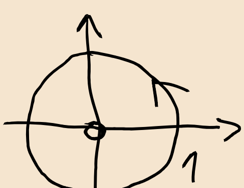
$\text{rot}\,\underline{F} = 0$ sse $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ (siamo in $\mathbb{R}^2$)

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\underline{F}$ def. in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow \text{rot}\,\underline{F} = \underline{0}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Ma non è conservativo in tale insieme.



$\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$\underline{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

Calcolo il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ.

$$L_\gamma(\underline{F}) = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{1}, \frac{\cos t}{1}\right) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0$$

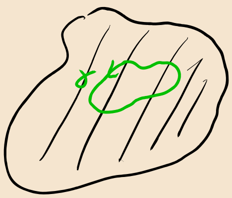
$\Rightarrow$ il campo non è conservativo

Def Un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$) si dice SEMPLICEMENTE CONNESSO se:

1) Ω è connesso

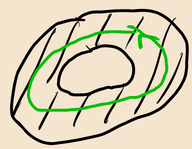
2) presa una qualunque curva semplice chiusa contenuta in Ω, allora essa può essere ritratta in un punto mediante una deformazione continua rimanendo sempre in Ω.

In $\mathbb{R}^2$ = PRIVO DI "BUCHI"

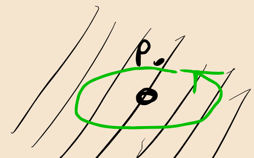


Sì

No (non connesso)



NO



$\mathbb{R}^2 - P_0$

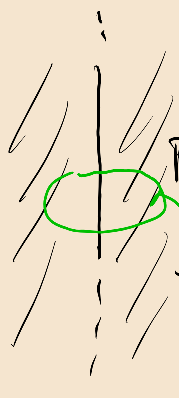
NO

In $\mathbb{R}^3$: PRIVI DI "MANICI"

Sì

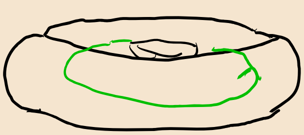
Sì

sfera cava



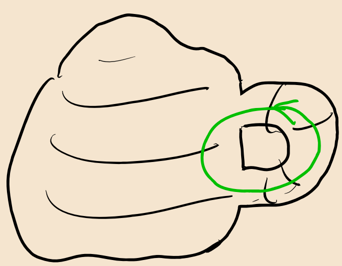
$\mathbb{R}^3 - \{\text{retta}\}$

No



No

TORO



No

corpo con manico

Teorema Sia $\underline{F} \in C^1(\Omega)$, Ω semplicemente connesso.
Allora:

$$\underline{F} \text{ conservativo} \iff \text{rot } \underline{F} = 0 \text{ in } \Omega.$$

Esempio precedente: $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ non semplicemente connesso.

Attenzione: se Ω non è semplic. connesso e rot $\underline{F} = \underline{0}$ in tutto Ω non si possono trarre conclusioni ($\underline{F}$ può essere o no conservativo).

COSTRUZIONE DELLA FUNZIONE POTENZIALE

- La funzione potenziale è univocamente determinata a meno di una costante additiva. Tale costante può essere fissata se assegniamo il valore del potenziale in un punto.

Esercizio $\underline{F} = \left(2y^3 + y\cos(xy) + 1,\ 6xy^2 + x\cos(xy)\right)$

Determinare, se esiste, il potenziale U t.c. $U(0,0) = 3$.

1° metodo = Integrazione diretta.

$\underline{F}$ definito in tutto $\mathbb{R}^2$ = semplicemente connesso. Basta calcolare il rotore per stabilire se $\underline{F}$ è conservativo: rot $\underline{F} = \underline{0}$ se $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 6y^2 + \cos(xy) - xy\sin(xy)$, $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 6y^2 + \cos(xy) - xy\sin(xy)$

$\Rightarrow$ rot $\underline{F} = 0 \Rightarrow$ campo conservativo. Allora posso procedere a determinare U.

$\nabla U = F \Rightarrow U_x = F_1,\ U_y = F_2. \Rightarrow$

$$\begin{cases} U_x(x,y) = 2y^3 + y\cos(xy) + 1 \\ U_y(x,y) = 6xy^2 + x\cos(xy) \end{cases}$$

Integro o la prima rispetto a x o la seconda rispetto a y.

Ad es: scelgo la seconda $\Rightarrow$ $U(x,y) = 2xy^3 + \sin(xy) + f(x)$ $\Rightarrow$ deriv risp. x

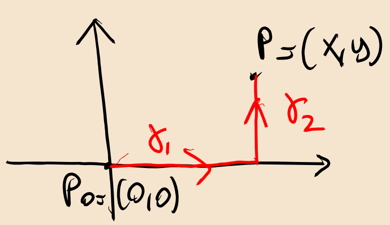
$U_x = 2y^3 + y\cos(xy) + f'(x)$ e la uguaglio alla prima espressione

$\Rightarrow \cancel{2y^3} + \cancel{y\cos(xy)} + f'(x) = \cancel{2y^3} + \cancel{y\cos(xy)} + 1$ tutto quello che dipende da y deve semplificarsi $\Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x + c$

$\Rightarrow U(x,y) = 2xy^3 + \sin(xy) + x + c$

$U(0,0) = 3 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow U(x,y) = 2xy^3 + \sin(xy) + x + 3.$

2° metodo: potenziale come lavoro.



$U(x,y,z) = L_\gamma(\underline{F}) + 3$

per semplicità: Basta stia nel dominio di $\underline{F}$

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ da $(0,0)$ a (x,y)

$\gamma_1: \underline{r}_1(t) = (t,0),\quad 0 \le t \le x$

$\gamma_2: \underline{r}_2(t) = (x,t),\quad 0 \le t \le y$

Così trovo il potenziale che vale zero nel punto iniziale $(0,0)$.
Per avere quello che vale 3 basta sommare tale valore.