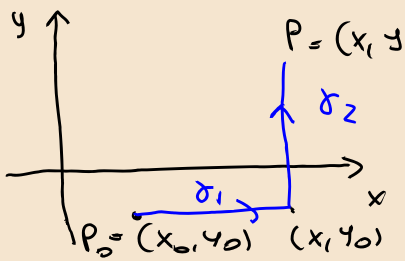
2° metodo per il calcolo del potenziale: integrale di linea



$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

$$\underline{r}_1(t) = (t, y_0), \quad x_0 \le t \le x \quad \Rightarrow r_1' = (1, 0)$$

$$\underline{r}_2(t) = (x, t), \quad y_0 \le t \le y \quad \Rightarrow r_2' = (0, 1)$$

$$\Rightarrow L_\gamma(\underline{F}) = L_{\gamma_1}(\underline{F}) + L_{\gamma_2}(\underline{F}) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} F_1(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x, t)\, dt$$

è il potenziale che vale 0 in $P_0 = (x_0, y_0)$. Allora il generico potenziale è $U(x, y) = \int_{x_0}^{x} F_1(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x, t)\, dt + c$.

ES $\underline{F} = (2y^3 + y\cos(xy) + 1,\ 6xy^2 + x\cos(xy))$

definito in tutto $\mathbb{R}^2$. Scelgo $P_0 = (0, 0)$. Allora:

$$U(x, y) = \int_0^x F_1(t, 0)\, dt + \int_0^y F_2(x, t)\, dt + c =$$

$$= \int_0^x 1\, dt + \int_0^y \left(6xt^2 + x\cos(xt)\right) dt + c =$$

$$= x + \Big[2xt^3 + \sin(xt)\Big]_{t=0}^{t=y} + c = x + 2xy^3 + \sin(xy) + c.$$

$$U(0, 0) = 3 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow U = x + 2xy^3 + \sin(xy) + 3.$$

Es. Sia $\underline{F} = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} + z e^{yz}, y e^{yz} \right)$. Determinare, se esiste, il potenziale in $\Omega = \{ (x,y,z) : y > 0 \}$.

- Ω è semplicemente connesso, dunque $\underline{F}$ conservativo sse $\operatorname{rot} \underline{F} = \underline{0}$.

$$\operatorname{rot} \underline{F} = \underline{0} \iff \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Poiché:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = e^{yz} + yz e^{yz}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = e^{yz} + zy e^{yz}.$$

$\Rightarrow \operatorname{rot} \underline{F} = \underline{0} \Rightarrow \underline{F}$ conservativo.

1° metodo: integro $\nabla U = \underline{F}$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_x = 1/y \\ U_y = -x/y^2 + z e^{yz} \\ U_z = y e^{yz} \end{cases}$$

$$U_x = 1/y \Rightarrow U(x,y,z) = x/y + f(y,z) \Rightarrow \begin{cases} U_y = -\frac{x}{y^2} + f_y(y,z) \\ U_z = f_z(y,z) \end{cases}$$

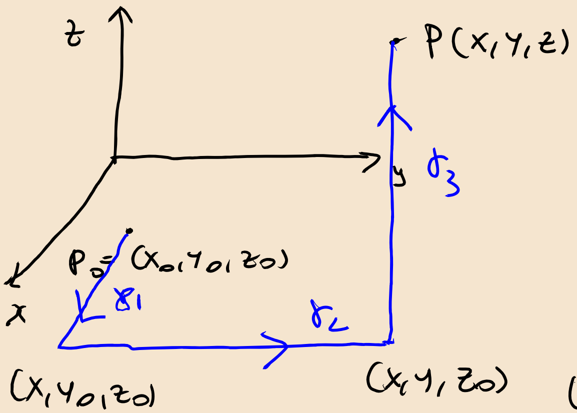
$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{-\frac{x}{y^2}} + z e^{yz} = \cancel{-\frac{x}{y^2}} + f_y(y,z) \\ y e^{yz} = f_z(y,z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_y = z e^{yz} \\ f_z = y e^{yz} \end{cases} \Rightarrow f(y,z) = e^{yz} + g(z) \Rightarrow f_z = y e^{yz} + g'(z) \Rightarrow$$

$$g'(z) = 0 \Rightarrow g(z) = c.$$

$$\Rightarrow U(x,y,z) = \frac{x}{y} + e^{yz} + c.$$

2° metodo : potenziale = lavoro.



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

$\underline{r}_1(t) = (t, y_0, z_0), \quad x_0 \le t \le x \rightarrow \underline{r}_1' = (1,0,0)$

$\underline{r}_2(t) = (x, t, z_0), \quad y_0 \le t \le y \rightarrow \underline{r}_2' = (0,1,0)$

$\underline{r}_3(t) = (x, y, t), \quad z_0 \le t \le z \rightarrow \underline{r}_3' = (0,0,1)$

$U = L_{\gamma_1}(\underline{F}) + L_{\gamma_2}(\underline{F}) + L_{\gamma_3}(\underline{F}) + c$

$$\Rightarrow U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} F_1(t, y_0, z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x, t, z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} F_3(x, y, t)\,dt + c$$

ES. precedente: $P_0 = (0, 1, 0)$

$$U(x,y,z) = \int_0^x F_1(t,1,0)\,dt + \int_1^y F_2(x,t,0)\,dt + \int_0^z F_3(x,y,t)\,dt + c$$

$$= \int_0^x 1\,dt + \int_1^y -\frac{x}{t^2}\,dt + \int_0^z y e^{yt}\,dt + c =$$

$$= x + \frac{x}{t}\Big|_{t=1}^{t=y} + e^{yt}\Big|_{t=0}^{t=z} + c = \cancel{x} + \frac{x}{y} - \cancel{x} + e^{yz} - 1 + c$$

$$= \frac{x}{y} + e^{yz} + c \qquad (c \text{ costante generica}).$$

---

osservazione: calcolo del lavoro di un campo.

1) Se il campo non è conservativo, il lavoro va calcolato sulla curva assegnata.

2) se il campo è conservativo, allora posso:

- cambiare la curva, prendendo una più semplice (segmento, una spezzata parallela agli assi, ...) con stesso punto iniziale e finale

oppure

- lavoro $= U(P_f) - U(P_i)$ P_f = punto finale, P_i = punto iniziale

$\Rightarrow$ Controllare sempre per prima cosa se il campo è conservativo.

Linguaggio delle FORME DIFFERENZIALI

- Forma differenziale

$$\omega = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

- Integrale di linea della forma

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

- Forma chiusa: $\operatorname{rot} \underline{F} = \underline{0}$

- Forma esatta:

$\exists f$ t.c. $df = \omega$ cioè:

$$\omega = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$$

$\Rightarrow F_1 = f_x,\ F_2 = f_y,\ F_3 = f_z$

- Campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$)

$$\underline{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

- Lavoro del campo

$$L_\gamma(\underline{F}) = \int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{P} = \int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

- Campo irrotazionale: $\operatorname{rot} \underline{F} = \underline{0}$

- Campo conservativo:

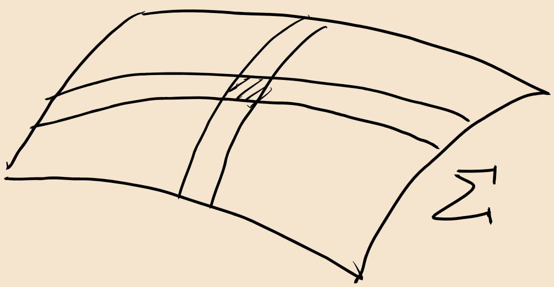
$\exists U$ t.c. $\nabla U = \underline{F}$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_x = F_1 \\ U_y = F_2 \\ U_z = F_3 \end{cases}$$

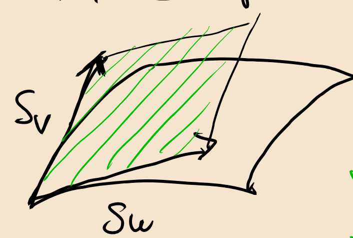
Integrali di SUPERFICIE

Sia Σ una superficie regolare, di parametrizzazione $S: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$S(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, $(u,v) \in D$.



Area infinitesima dS



si può approssimare con

$$\underbrace{|S_u \wedge S_v|\,du\,dv}_{\text{Area parallelogramma infinitesimo}}$$

Def: Data f continua, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS = \iint_D f\big(S(u,v)\big)\,|S_u \wedge S_v|\,du\,dv$$

area infinitesima della superficie

$\Rightarrow$ Si riduce ad un integrale doppio nel piano.

Applicazione:

$$\iint_\Sigma 1\,dS = \text{Area}(\Sigma)$$

Se $\rho = \rho(x,y,z)$ è densità di massa:

$$\iint_\Sigma \rho(x,y,z)\,dS = \text{Massa}(\Sigma) = M$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{M}\iint_\Sigma x\,\rho(x,y,z)\,dS &= x_G \\ \frac{1}{M}\iint_\Sigma y\,\rho(x,y,z)\,dS &= y_G \\ \frac{1}{M}\iint_\Sigma z\,\rho(x,y,z)\,dS &= z_G \end{aligned}\right\} \text{centro di massa}$$

$$I = \iint_{\Sigma} d^2(x,y,z)\,\rho(x,y,z)\,dS$$ momento di inerzia.

d = distanza dall'asse di rotazione.

Esempi. 1) Area di una superficie cartesiana

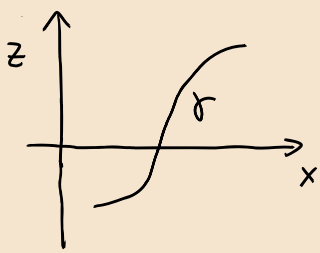
Sia $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. La superficie = grafico di f si parametrizza:

$S(x,y) = (x, y, f(x,y))$, $(x,y) \in D$.

Poiché $S_x \wedge S_y = \underline{N} = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$, allora:

$$\text{Area} = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\,dy.$$

2) Area di una superficie di rotazione



$\underline{r}(t) = (x(t), z(t))$ rotaz. attorno asse z, $x \geq 0$

$S(t,\theta) = (x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, z(t))$

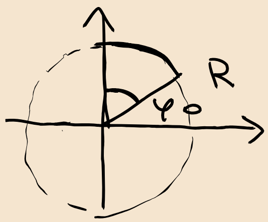
$t \in [a,b]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

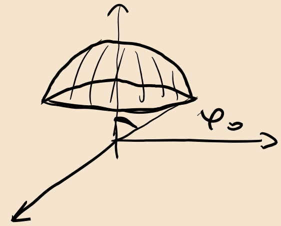
$$S_t \wedge S_\theta = \underline{N} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x'\cos\theta & x'\sin\theta & z' \\ -x\sin\theta & x\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-xz'\cos\theta, -xz'\sin\theta, xx')$$

$$\Rightarrow |\underline{N}| = |S_t \wedge S_\theta| = x(t)\sqrt{z'(t)^2 + x'(t)^2} = x(t)\,|\underline{r}'(t)|$$

$$\Rightarrow \text{Area} = \int_a^b \int_0^{2\pi} x(t)\,|\underline{r}'(t)|\,d\theta\,dt = 2\pi \int_a^b x(t)\,|\underline{r}'(t)|\,dt$$

Esercizi Sia Σ la calotta sferica di ampiezza angolare φ_0, $\varphi_0 \in (0,\pi)$. Determinare l'area di Σ.





$$\underline{r}(\varphi) = (R\sin\varphi,\ R\cos\varphi)$$
$$\varphi \in [0, \varphi_0]$$
$$\underline{r}'(t) = (R\cos\varphi, -R\sin\varphi)$$
$$\Rightarrow |\underline{r}'| = R$$

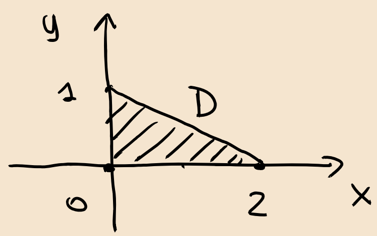
$$\Rightarrow A = 2\pi\int_0^{\varphi_0} R^2\sin\varphi\, d\varphi = 2\pi R^2\left[-\cos\varphi\right]_0^{\varphi_0} = 2\pi R^2(1-\cos\varphi_0)$$

Es:

- $\varphi_0 = \pi \Rightarrow 4\pi R^2$ area superficie sferica
- $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi R^2$ semisfera

Fare per esercizio $\Rightarrow$ Area della superficie del Toro $= 4\pi^2 rR$

Esercizio Calcolare $\iint_{\Sigma} x^2 z\, dS$, dove Σ è la parte di piano $x+2y-z=1$ che sottende il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$.



Piano = superficie cartesiana

$$S(x,y) = (x, y, x+2y-1), \quad (x,y)\in D$$
$$|S_x \wedge S_y| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \quad (f_x = 1,\ f_y = 2)$$

$$\iint_{\Sigma} x^2 z\, dS = \iint_D x^2(x+2y-1)\sqrt{6}\, dx\,dy = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Controllare!

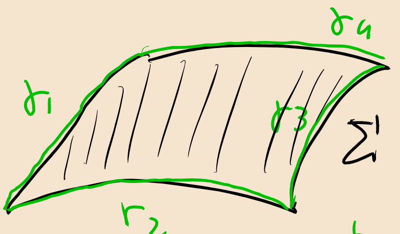
Superficie ORIENTABILE

Def. Una superficie regolare si dice orientabile se, per ogni curva chiusa regolare (a tratti), semplice, se seguiamo il versore normale sulla curva, dopo un giro completo ritrovo il versore con lo stesso verso iniziale.

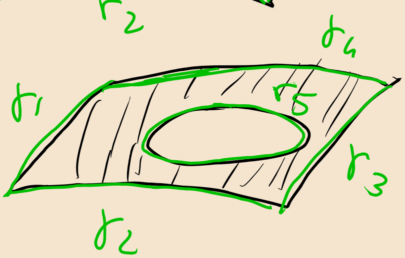
Es di superficie non orientabile: nastro di Möebius.

L'orientamento di una superficie orientabile è dato dalla scelta di uno dei due versi del versore normale (Es. verso l'alto, o verso il basso, entrante o uscente ...)

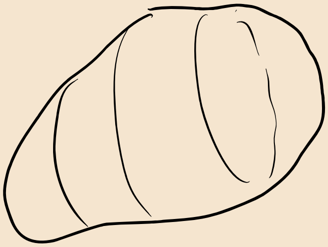
Bordo di una superficie orientabile.
Unione di curve regolari (a tratti), semplici e chiuse t.c. un osservatore che le percorre ha sempre la superficie da 1 sola parte (destra o sinistra)



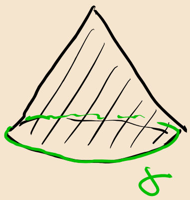
$$\partial\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$



$$\partial\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_4 \cup \gamma_4 \cup \gamma_5$$

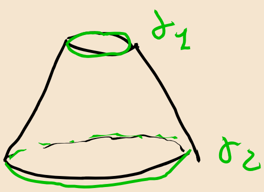


$\partial\Sigma = \emptyset$ senza bordo = superficie CHIUSA.



superficie laterale del cono limitato

$\partial\Sigma = \gamma$



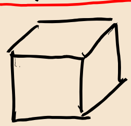
superficie del tronco di cono

$\partial\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

Superficie regolare a pezzi

Def. Una superficie si dice regolare a pezzi se esiste un numero finito di curve regolari (a tratti), dette spigoli, che suddividono la superficie in un numero finito di superfici regolari, dette facce.

Il bordo di una superficie regolare a pezzi è dato dall'unione dei bordi delle facce con esclusione degli spigoli tra due facce adiacenti



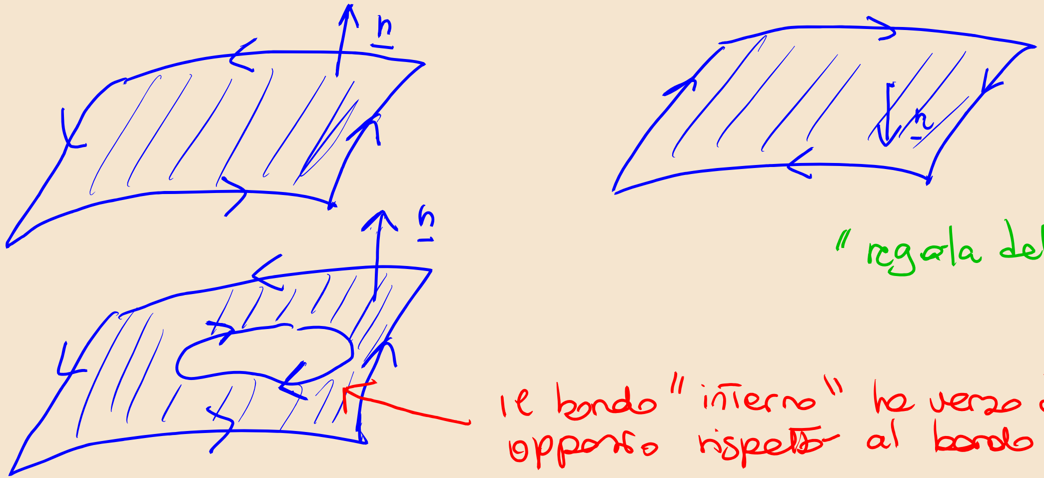
$\partial\Sigma = \emptyset$

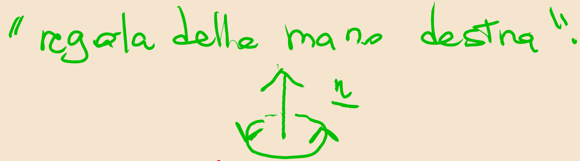
superficie laterale di un tronco di piramide

$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

Una superficie regolare a pezzi può essere deformata in modo continuo in una superficie regolare ("smussando" gli spigoli). Se la superficie regolare ottenuta è orientabile allora la superficie regolare a pezzi è orientabile.

Il **bordo** di una superficie regolare (a pezzi) orientata si dice **orientato positivamente** se un osservatore posto sulla superficie, orientato come il versore $\underline{n}$, che lo percorre, ha sempre la superficie alla sua sinistra.





Il bordo "interno" ha verso di percorrenza opposto rispetto al bordo "esterno".