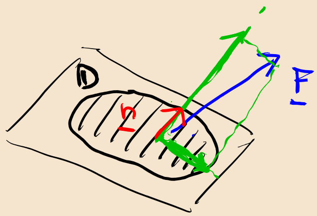
Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata.

Flusso = quantità di "materia" che attraversa la superficie nell'unità di tempo nel verso indicato.

Caso semplice: campo $\underline{F}$ costante e superficie piana



$\underline{F} \cdot \underline{n}$ componente ortogonale al piano

Flusso attraverso D nella direzione $\underline{n}$:

$$\Phi = (\underline{F} \cdot \underline{n}) \cdot \text{Area}(D).$$

In generale: $\underline{F} = \underline{F}(x, y, z)$ non costante e superficie generica.

$\Rightarrow$ flusso infinitesimo $d\Phi = (\underline{F} \cdot \underline{n})\, dS$. ← elemento di area infinitesimo.

Def. Sia $\underline{F}$ un campo vettoriale $\underline{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, Ω aperto e sia Σ una superficie orientata, $\Sigma \subset \Omega$, si definisce flusso di $\underline{F}$ attraverso Σ nella direzione $\underline{n}$:

$$\Phi_\Sigma(\underline{F}) = \iint_\Sigma (\underline{F} \cdot \underline{n})\, dS$$

(integrale di superficie della componente normale del campo)

Parametrizzando la superficie: $S: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $S = S(u, v)$

$$\underline{n} = \frac{S_u \wedge S_v}{|S_u \wedge S_v|}, \quad dS = |S_u \wedge S_v|\, du\, dv \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_{\Sigma}(\underline{F}) = \iint_D \underline{F}(S(u,v)) \cdot \underbrace{(S_u \wedge S_v)}_{\underline{N}(u,v)} \, du\, dv$$

- il flusso è indipendente dalla parametrizzazione se non cambia il verso del versore normale $\underline{n}$.
- Se cambio di verso a $\underline{n}$ il flusso cambia segno.

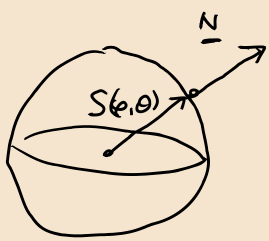
Esercizio. Calcolare il flusso del campo $\underline{F} = (x, 0, y)$ uscente dalla sfera di centro l'origine e raggio R.

Parametrizzo la superficie della sfera:

$$S(\varphi,\theta) = (R\sin\varphi\cos\theta,\ R\sin\varphi\sin\theta,\ R\cos\varphi), \quad \varphi \in [0,\pi],\ \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \underline{N}(\varphi,\theta) = S_\varphi \wedge S_\theta = R^2(\sin^2\varphi\cos\theta, \sin^2\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\theta)$$

$$= R\underbrace{\sin\varphi}_{>0}\, S(\varphi,\theta) \quad \text{uscente dalla sfera}$$



$\Rightarrow$ Flusso uscente dalla sfera:

$$\Phi_{\Sigma}(\underline{F}) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \underline{F}(S(\varphi,\theta)) \cdot \underline{N}(\varphi,\theta)\, d\theta\, d\varphi$$

$$= R^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (R\sin\varphi\cos\theta, 0, R\sin\varphi\sin\theta)\cdot(\sin^2\varphi\cos\theta, \sin^2\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\theta)\, d\theta\, d\varphi$$

$$= R^3\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\sin^3\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta)\, d\theta\, d\varphi = \dots = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Finire i calcoli

$$\left(\sin^3\varphi = \sin\varphi(1-\cos^2\varphi), \quad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)$$

Esercizio Sia $\underline{E}$ il campo elettrostatico generato da una carica posta nell'origine. Calcolare il flusso di $\underline{E}$ uscente da una sfera di centro l'origine e raggio R.

$$\underline{E} = kq \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3} \qquad \underline{r} = (P-O) = (x,y,z)$$

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} \Rightarrow \underline{E}\cdot\underline{n} = \frac{kq}{|\underline{r}|^2} = |\underline{E}|$$

$$\Rightarrow \Phi_{\Sigma}(\underline{E}) = \iint_{\Sigma} (\underline{E}\cdot\underline{n})\, dS = \iint_{\Sigma} \frac{kq}{|\underline{r}|^2}\, dS = \frac{kq}{R^2} \underbrace{\iint_{\Sigma} dS}_{\text{Area della superficie sferica}}$$

$$= \frac{kq}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi kq$$

sulla superficie della sfera: $|\underline{r}| = R$.

Teorema della divergenza (o di Gauss)

Sia E aperto limitato e connesso $\subset \mathbb{R}^3$, con ∂E regolare (a pezzi), sia $\underline{n}$ versore esterno e $\Omega = \overline{E} = E \cup \partial E$.
Sia $\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A \supset \Omega$, $\underline{F} \in C^1(A)$. Allora:

$$\iint_{\partial\Omega} (\underline{F}\cdot\underline{n})\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\underline{F}\, dx\,dy\,dz$$

Il flusso uscente dalla superficie chiusa $\partial\Omega$ è pari all'integrale della divergenza del campo esteso al volume racchiuso da $\partial\Omega$. È una equazione di bilancio.

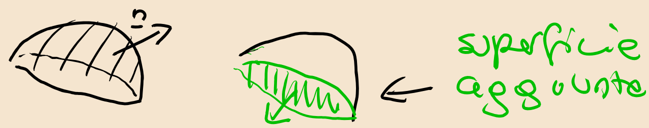
Esercizio precedente: $\underline{F} = (x, 0, y)$, Σ_1 = superficie sfera.

Utilizzo il teo. della divergenza: $\text{div}\, \underline{F} = 1 + 0 + 0 = 1$

$$\Rightarrow \Phi_{\Sigma_1}(\underline{F}) = \iiint_{\Omega} \text{div}\, \underline{F}\, dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \underline{\underline{\text{Vol}(\Omega)}}$$

Ω = sfera di centro l'origine e raggio R.

Il Teorema della divergenza si può anche applicare se la superficie non è chiusa; basta "aggiungere" una superficie che la chiude e togliere il contributo al flusso della superficie aggiunta.

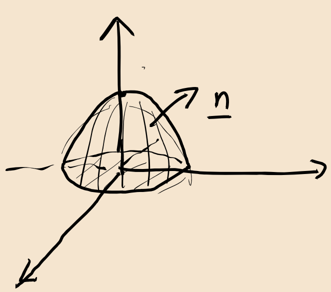


Esercizio Sia $\underline{V} = (x + 2yz^2, z^2 - 3y, z^2 - xy)$. Calcolare il flusso di V uscente dalla superficie del paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$, $0 \le z \le 2$.

1° metodo: def. di flusso

Parametrizzo la superficie. (come superficie cartesiana)

$$S(x,y) = (x, y, 2 - x^2 - y^2), \quad (x,y) \in D, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2\}$$



$$\underline{N} = (2x, 2y, 1) \text{ uscente}$$

$$\Rightarrow \Phi_{\Sigma}(\underline{V}) = \iint_D \left(x + 2y(2 - x^2 - y^2)^2, (2 - x^2 - y^2)^2 - 3y, (2 - x^2 - y^2)^2 - xy\right) \cdot (2x, 2y, 1)\, dx\,dy$$

in coord. polari:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt2}\rho\left(\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta(2-\rho^2)^2,\ (2-\rho^2)^2-3\rho\sin\theta,\ (2-\rho^2)^2-\rho^2\sin\theta\cos\theta\right)$$
$$\cdot(2\rho\cos\theta,2\rho\sin\theta,1)\,d\rho\,d\theta=\dots$$

Finire i calcoli!

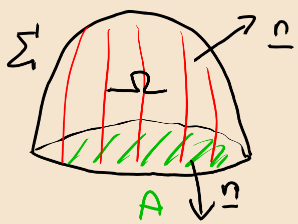
<u>2° metodo</u>. Teorema della divergenza.

$\operatorname{div}\underline{V}=1-3+2z=2z-2$

Attenzione: la superficie <u>non</u> è chiusa. $\Rightarrow$ la chiudo aggiungendo l'insieme $A=\{(x,y,z):\ z=0,\ x^2+y^2\le 2\}$. Parametrizzato:

$S_2(x,y)=(x,y,0)$, $(x,y)\in D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 2\}$

$\Rightarrow \underline{N}=(0,0,1)$ entrante. $\rightarrow$ cambio il segno al flusso.



$\Rightarrow$ flusso di V uscente da $\Sigma_1\cup A$ è:

$$\Phi_{\Sigma_1}(\underline{V})-\Phi_A(\underline{V}).$$

segno meno perché la parametrizzazione mi dà il flusso entrante

Teo. della divergenza:

$$\Phi_{\Sigma_1}(\underline{V})-\Phi_A(\underline{V})=\iiint_\Omega \operatorname{div}\underline{V}\,dxdydz\Rightarrow$$

$$\Phi_{\Sigma_1}(\underline{V})=\Phi_A(\underline{V})+\iiint_\Omega \operatorname{div}\underline{V}\,dxdydz.$$ Abbiamo:

$$\Phi_A(\underline{V})=\iint_D -xy\,dxdy=0$$

xy <u>dispari</u> risp. alla simmetria $(x,y)\to(-x,y)$ (simmetria risp. asse y)

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}V\,dxdydz=\iiint_\Omega(2z-2)\,dxdydz.$$

Per strati:

$$\iiint_\Omega (2z-2)\,dx\,dy \qquad \Omega = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 2,\ (x,y) \in D_z\}$$

$$D_z = \{(x,y) : x^2+y^2 \le \underbrace{2-z}_{R^2}\}$$

$$= \int_0^2 \left(\iint_{D_z} 2(z-1)\,dx\,dy \right) dz$$

$$= \int_0^2 2(z-1) \left(\iint_{D_z} 1\,dx\,dy \right) dz = \int_0^2 2(z-1) \underbrace{\pi(2-z)}_{\text{Area cerchio } D_z}\,dz$$

$$= 2\pi \int_0^2 (-z^2+3z-2)\,dz = 2\pi \left[-\frac{z^3}{3} + \frac{3}{2}z^2 - 2z \right]_0^2 =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{8}{3} + 6 - 4 \right) = 2\pi \left(-\frac{2}{3} \right) = -\frac{4}{3}\pi$$

$$\Rightarrow \Phi_{\Sigma}(\underline{V}) = -\frac{4\pi}{3} + 0 = -\frac{4\pi}{3}.$$