RIASSUNTO SU ESTREMI LIBERI -

Sia $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto critico per $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $f \in C^2(A)$. Allora: detta Q la forma quadratica associata all'hessiana di f in $\underline{x}_0$: $Q(\underline{h}) = h^t H_f(\underline{x}_0) h$, risulta:

- se Q è definita positiva allora $\underline{x}_0$ è di minimo loc.
- se Q è definita negativa allora $\underline{x}_0$ è di massimo loc.
- se Q è indefinita allora $\underline{x}_0$ è di sella.

CRITERIO per $n = 2$

se $\det H_f(x_0, y_0) > 0$ e $\to a_{11} > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ minimo loc.
$\searrow a_{11} < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ massimo loc.

Se $\det H_f(x_0, y_0) < 0 \to (x_0, y_0)$ sella.

IN GENERALE per $n \geq 2$)

se $\det H_k > 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots n \quad \Rightarrow \underline{x}_0$ è di minimo loc.

se $(-1)^k \det H_k > 0 \quad \forall k = 1, 2 \dots n \quad \Rightarrow \underline{x}_0$ è di massimo loc.

dove

H_k = sottomatrice (di nord-ovest) di ordine k

$\det H_k$ = minore principale di ordine k.

Esempi

$n = 2$: $H_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad \det H_1 = a_{11} \begin{cases} > 0 & \text{minimo loc.} \\ < 0 & \text{massimo loc.} \end{cases}$

$\det H_2 = \det H_f > 0$

$n = 3$

$$H_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\det H_1 = a_{11}$

$\det H_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$

$\det H_3 = \det H_f$

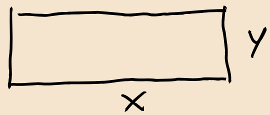
$\Rightarrow$ Se $a_{11} > 0$, $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$, $\det H_f > 0 \Rightarrow$ minimo loc.

Se $a_{11} < 0$, $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$, $\det H_f < 0 \Rightarrow$ massimo loc.

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA ($n = 2$)

Data $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω aperto, $f \in C^1(\Omega)$, e dato un vincolo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 0$, $g \in C^1$, determinare (se esiste) il massimo e/o il minimo di f ristretto a $g = 0$.

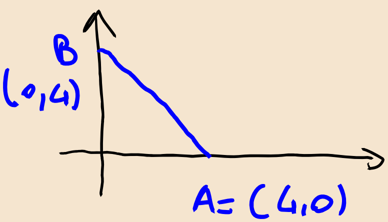
<u>Esempio</u>: Tra tutti i rettangoli di perimetro 8 determinare quello di area massima.



Area $= xy$

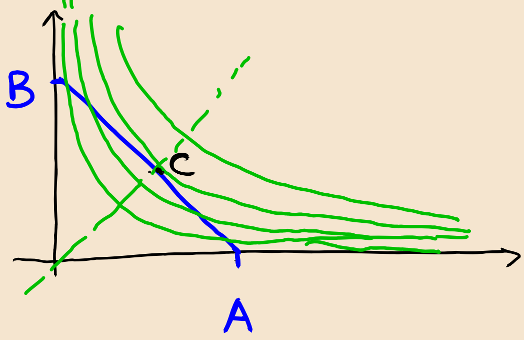
Perimetro $= 2(x+y)$

$\Rightarrow$ Determinare il massimo di $f(x,y) = xy$ quando $x + y = 4$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$.



La curva è limitata e chiusa, f continua

$\Rightarrow$ esiste massimo assoluto per Weierstrass



1° metodo : linee di livello

Linee di livello di f = iperboli

Massimo = punto di tangenza

$C = (2,2) \Rightarrow \max f = 2 \cdot 2 = 4$

Il minimo è assunto agli estremi A e B $\Rightarrow \min f = 0$

Il metodo si estende a casi più generali in cui non si sanno disegnare le linee di livello.

2° metodo : parametrizzare il vincolo

$g(x,y) = x+y-4 = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ vincolo $\rightarrow$ parametrizzo

$\underline{r}(t) = (t, -t+4)$, $0 \leq t \leq 4$.

Restrizione di f al vincolo : $h(t) = f(\underline{r}(t)) = t(-t+4) =$

$= -t^2 + 4t$, $0 \leq t \leq 4$. Per $t \in (0,4)$:

$h'(t) = -2t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2$ accettabile $(2 \in (0,4)) \rightarrow C = \underline{r}(2)$

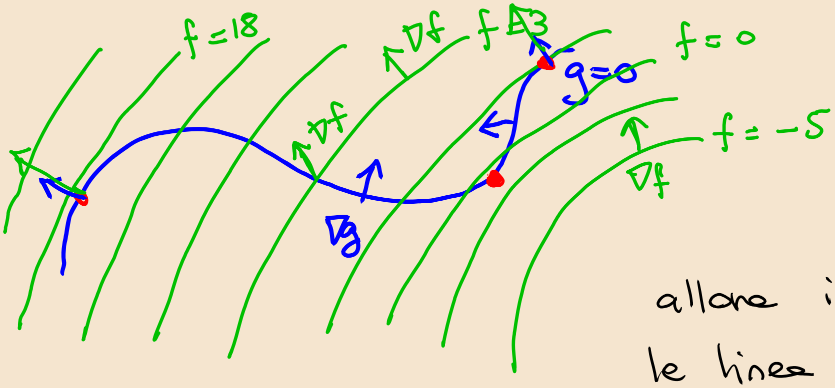
$= (2, 2)$ e $f(2,2) = 4$

Inoltre $f(A) = f(B) = 0 \Rightarrow 4$ massimo assoluto e 0 è minimo assoluto.

IN GENERALE

1° metodo = Metodo dei moltiplicatori di LAGRANGE

Idea di fondo: determinare i punti di tangenza tra il vincolo e le linee di livello di f.



Poiché ∇f è $\perp$ alle linee di livello di f

e ∇g è perpendicolare a $g=0$ (linea di livello 0 per g)

allora i punti di tangenza tra le linee di livello di f e il vincolo sono caratterizzati da: $\underline{\nabla f \parallel \nabla g}$ cioè:

$$\boxed{\nabla f = \lambda \nabla g} \quad \text{per un certo } \lambda \in \mathbb{R}$$

Dunque:

Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\Omega)$, e sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g \in C^1$ la rappresentazione del vincolo:

$$\Gamma = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0 \}$$

Γ regolare, cioè $\nabla g(x,y) \neq \underline{0}$ $\forall (x,y) \in \Gamma$.

Allora se (x_0, y_0) è un punto di massimo o minimo vincolato per f a Γ, (x_0,y_0) soddisfa:

$$\boxed{\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}}$$

3 equazioni

3 incognite (x, y, λ)

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

Osservazione : 1) $g(x,y)=0$ è la richiesta che il punto stia sul vincolo.

2) Funzione Lagrangiana $L(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$

$\nabla L = \nabla f - \lambda \nabla g = 0 \Rightarrow$ punti critici della Lagrangiana sono i punti critici di f vincolati a $g=0$.

Esempio

$f(x,y) = xy$ vincolo $x+y-4=0 \Rightarrow g(x,y) = x+y-4$

$\nabla f = (y,x)$ $\nabla g = (1,1)$. Risolvere:

$$\begin{cases} y = \lambda \cdot 1 \\ x = \lambda \cdot 1 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ x = \lambda \\ 2\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

unico punto critico vincolato interno al vincolo

I punti di massimo e minimo sul vincolo sono dunque da cercarsi tra i punti : $C=(2,2)$ e i punti estremi del vincolo A, B.

Essendo $f(C)=4$, $f(A)=0=f(B)$ risulta C punto di massimo vincolato, A e B punti di minimo vincolato, Massimo di $f=4$ Minimo di $f=0$.