Teorema del ROTORE (o di STOKES)

Sia Σ una superficie regolare (a pezzi) orientata, con $\underline{n}$ versore normale, e sia $\partial\Sigma^+$ il bordo orientato positivamente, $\partial\Sigma$ unione di curve regolari (a tratti) semplici e chiuse.

Sia $\underline{F} \in C^1(A)$, $F: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, A aperto $\supset \Sigma$. Allora:

$$\boxed{\Phi_{\Sigma}(\mathrm{rot}\ \underline{F}) = L_{\partial\Sigma^+}(\underline{F})}$$

ossia:

$$\iint_{\Sigma} (\mathrm{rot}\ \underline{F} \cdot \underline{n})\, dS = \int_{\partial\Sigma^+} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz.$$

osservazioni.

1) Se la superficie è chiusa $\Rightarrow \partial\Sigma = \emptyset \Rightarrow \Phi_{\Sigma}(\mathrm{rot}\ \underline{F}) = 0$ $\forall \underline{F}$. Deriva anche dal Teorema della divergenza, perché $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\ \underline{F}) = 0$ $\forall \underline{F}$ (identità differenziale).

2) Sia $\underline{F}$ t.c. $\mathrm{rot}\ \underline{F} = \underline{0} \Rightarrow L_{\partial\Sigma^+}(\underline{F}) = 0$

Es:

$$\partial\Sigma^+ = \gamma_1 \cup \gamma_2 \Rightarrow L_{\gamma_1}(\underline{F}) + L_{\gamma_2}(\underline{F}) = 0$$

$$\Rightarrow L_{\gamma_1}(\underline{F}) = -L_{\gamma_2}(\underline{F})$$

$$\Rightarrow L_{\gamma_1}(\underline{F}) = L_{-\gamma_2}(\underline{F}).$$

non significa che $L_{\gamma_1}(F) = 0 = L_{\gamma_2}(\underline{F})$!

Caso particolare: superficie piana e campo bidimensionale

Teorema di GAUSS - GREEN

Sia D un dominio regolare $\subset \mathbb{R}^2$, con ∂D unione di curve regolari (a tratti) semplici e chiuse. Sia ∂D^+ orientato positivamente (secondo regola della mano destra) e sia $\underline{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ A aperto $\supset D$, $\underline{F} \in C^1(A)$. Allora:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\partial D^+} F_1\,dx + F_2\,dy$$

dove $\underline{F} = (F_1, F_2)$.

È un caso particolare del teo. del rotore, pensando $\mathbb{R}^2$ immerso in $\mathbb{R}^3$:

$\underline{F}(x,y,z) = (F_1(x,y), F_2(x,y), 0)$

D come sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ lo posso vedere come superficie regolare:

$\underline{S}(x,y) = (x,y,0), \quad (x,y) \in D.$

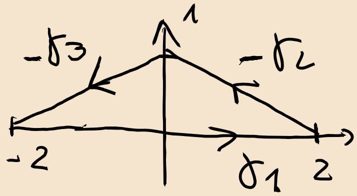
$S_x = \underline{i}, \quad S_y = \underline{j} \Rightarrow S_x \wedge S_y = \underline{k} \Rightarrow dS = dx\,dy$

$\text{rot}\,\underline{F} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\underline{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{rot}\,\underline{F} \cdot \underline{n} = \text{rot}\,\underline{F} \cdot \underline{k} = (F_2)_x - (F_1)_y.$

$$\Rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_{\Sigma} (\text{rot}\,\underline{F} \cdot \underline{n})\,dS.$$

Esempio 1. Applicazione "diretta": trasformo un integrale di linea in un integrale doppio.



Sia $\underline{F} = (xy^3, x^2)$. Calcolare $L_{\partial D^+}(\underline{F})$, dove ∂D^+ è la frontiera del triangolo di vertici $(-2,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, orientato positivamente

(i) Risolvo con la definizione di lavoro: integrale di linea di seconda specie.

$\underline{F}$ non è conservativo $\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x - 3xy^2 \not\equiv 0\right)$

$\partial D^+ = \gamma_1 \cup (-\gamma_2) \cup (-\gamma_3)$

$\underline{r}_1(t) = (t, 0), \quad -2 \le t \le 2 \Rightarrow \underline{r}_1'(t) = (1, 0)$

$r_2(t) = \left(t, -\frac{t}{2}+1\right), \quad 0 \le t \le 2 \Rightarrow \underline{r}_2'(t) = \left(1, -\frac{1}{2}\right) \qquad \left(y = -\frac{x}{2}+1\right)$

$\underline{r}_3(t) = \left(t, \frac{t}{2}+1\right), \quad -2 \le t \le 0 \Rightarrow \underline{r}_3'(t) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \qquad \left(y = \frac{x}{2}+1\right)$

$\Rightarrow L_{\partial D^+}(\underline{F}) = L_{\gamma_1}(\underline{F}) + L_{-\gamma_2}(\underline{F}) + L_{-\gamma_3}(\underline{F}) = L_{\gamma_1}(\underline{F}) - L_{\gamma_2}(\underline{F}) - L_{\gamma_3}(\underline{F})$

$L_{\gamma_1}(\underline{F}) = \int_{-2}^{2} (0, t^2)\cdot(1,0)\,dt = \int_{-2}^{2} 0\,dt = 0$

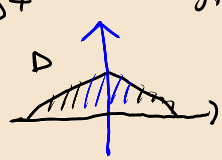
$L_{r_2}(\underline{F}) = \int_0^2 \left(t\left(-\frac{t}{2}+1\right)^3, t^2\right)\cdot\left(1, -\frac{1}{2}\right)dt =$ finire ...

$L_{\gamma_3}(\underline{F}) = \int_{-2}^{0} \left(t\left(\frac{t}{2}+1\right)^3, t^2\right)\cdot\left(1, \frac{1}{2}\right)dt =$ finire ...

(ii) Invece utilizzando il teorema di Gauss-Green:

$$L_{\partial D^+}(\underline{F}) = \iint_D (F_2)_x - (F_1)_y \, dx\,dy = \iint_D (2x - 3xy^2)\,dx\,dy = 0$$

per la simmetria



il triangolo è simmetrico risp. asse y
$\to$ simmetria $(x,y) \to (-x,y)$

Inoltre $f(x,y) = 2x - 3xy^2$ è <u>dispari</u> rispetto alla simmetria $(x,y) \leftrightarrow (-x,y)$.

Esempio 2. Applicazione "inversa". Ridurre l'integrale doppio ad un integrale di linea.

Attenzione:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial D+} F_1\,dx + F_2\,dy$$

chi sono F_1 e F_2?

$\underline{F} = (F_1, F_2)$ un <u>qualunque</u> campo t.c. $(F_2)_x - (F_1)_y = f(x,y)$

$\rightarrow$ infinite scelte!

<u>ES</u>: $f(x,y) = 1 \Rightarrow \iint_D dx\,dy = \text{Area}(D)$.

$\underline{F}$ t.c. $(F_2)_x - (F_1)_y = 1$.

Esempi di scelte possibili:

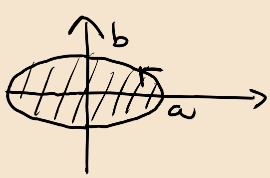
$\underline{F}^1(x,y) = (0, x) \longrightarrow A = \int_{\partial D+} x\,dy$

$\underline{F}^2(x,y) = (-y, 0) \longrightarrow A = \int_{\partial D+} -y\,dx$

$\underline{F}^3(x,y) = \left(\frac{-y}{2}, \frac{x}{2}\right) \longrightarrow A = \int_{\partial D+} -\frac{y}{2}\,dx + \frac{x}{2}\,dy$

Tutte formule corrette per il calcolo dell'area

<u>Esempio</u>: Area di una ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.



$\underline{r}(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$\underline{r}'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$

1) $A = \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t\,dt = ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt$

2) $A = \int_0^{2\pi} -b\sin t \cdot (-a\sin t)\,dt = ab\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt$

3) $A = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} 1\,dt = \pi ab$

<u>Esercizio</u>. Sia $\underline{F} = (x, 0, y)$ e sia Σ_1' la superficie del quarto di sfera

$$\Sigma_1' = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2,\ x \geq 0,\ z \geq 0\}$$

Calcolare il flusso del rot $\underline{F}$ uscente da Σ_1'.

— . —

1) Calcolo diretto.

Parametrizzo Σ_1': $\underline{S}(\varphi,\theta) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)$,

$z \geq 0 \Rightarrow \varphi \in [0, \pi/2]$, $x \geq 0 \Rightarrow \cos\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$

$(\varphi,\theta) \in [0,\pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$

$$\underline{F} = (x,0,y) \Rightarrow \text{rot}\,\underline{F} = \nabla \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & 0 & y \end{vmatrix} = (1,0,0) = \underline{i}$$

$\underline{N}(\varphi,\theta) = R\sin\varphi\, \underline{S}(\varphi,\theta)$

$$\phi_{\Sigma_1'}(\text{rot}\,\underline{F}) = \iint_{\Sigma_1} (\text{rot}\,\underline{F} \cdot \underline{n})\,dS = \int_0^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underline{i} \cdot \underline{N}(\varphi,\theta)\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\sin\varphi \cdot R\sin\varphi\cos\theta\,d\theta\,d\varphi =$$

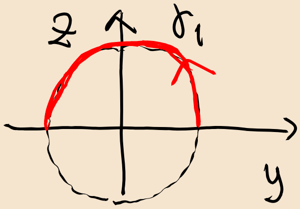
$$= R^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = \text{finire} \ldots = \frac{\pi R^2}{2}$$

<u>2) Teorema del rotore:</u> $\phi_{\Sigma_1'}(\text{rot}\,\underline{F}) = L_{\partial\Sigma_1^+}(\underline{F})$.

$\partial\Sigma_1$ bordo della superficie

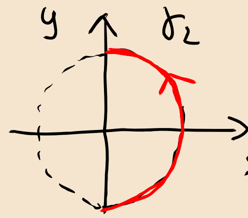
$x^2+y^2+z^2=R^2$, $x\geq 0$, $z\geq 0$ $\Rightarrow$ superficie viene "tagliata"

con i piani $x=0$ e $z=0$



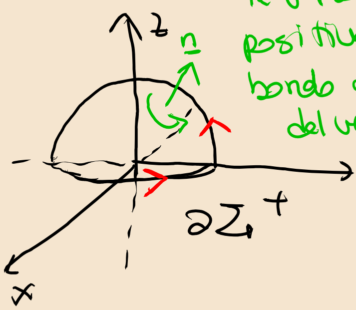
$x=0$

$$\begin{cases} z\geq 0 \\ y^2+z^2=R^2 \end{cases}$$



$z=0$

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$$



il verso di percorrenza positivo del bordo dipende dal verso fissato di $\underline{n}$

$$\underline{r}_1(t)=(0,\ R\cos t,\ R\sin t),\quad t\in[0,\pi]$$

$$\underline{r}_2(t)=(R\cos t,\ R\sin t,\ 0),\quad t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow L_{\partial\Sigma_1^+}(\underline{F})=L_{\gamma_1}(\underline{F})+L_{\gamma_2}(\underline{F}).$$

$$L_{\gamma_2}(\underline{F})=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(R\cos t,\ 0,\ R\sin t)\cdot(-R\sin t,\ R\cos t,\ 0)\,dt=0$$

$$L_{\gamma_1}(\underline{F})=\int_0^{\pi}(0,\ 0,\ R\cos t)\cdot(0,\ -R\sin t,\ R\cos t)\,dt=\frac{R^2\pi}{2}.$$

Fare i calcoli per esercizio.