2° Metodo: Parametrizzare la curva $\quad (f \in C^1(A))$

Se è possibile scrivere una parametrizzazione del vincolo $\underline{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$, allora i massimi e minimi vincolati si determinano considerando la restrizione

$$f(\underline{r}(t)) = f(x(t), y(t)), \quad t \in [a,b]$$

funzione di 1 variabile reale: $h(t) = f(\underline{r}(t))$. I punti critici interni alla curva si trovano risolvendo $h'(t) = 0$.

Osservazione. $h'(t) = \nabla f(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) = 0 \Rightarrow \nabla f$ perpendicolare al vincolo, cioè troviamo i punti in cui le linee di livello di f sono tangenti al vincolo.

ATTENZIONE. Per entrambi i metodi

1) Se la curva è chiusa (circonferenza, ellisse ...) è sufficiente considerare i punti critici vincolati trovati.

2) Se la curva non è chiusa (arco di curva) allora bisogna considerare anche i punti estremi della curva.

Esercizio

Determinare i punti della curva $2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$ che realizzano la massima e la minima distanza da $P = (1,0)$.

Uso i moltiplicatori di Lagrange. Vincolo: $g = 2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$

distanza: $d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \Rightarrow$ Studio $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$.

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = (2(x-1), 2y)$, $\nabla g(x,y) = (4x, 6y)$ e risolvo

$$\begin{cases} 2(x-1) = \lambda \cdot 4x \\ 2y = \lambda\, 6y \\ 2x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1) = 2\lambda x \\ 2y(1-3\lambda) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee \lambda = 1/3 \\ 2x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases}$$

$1°)\begin{cases} y = 0 \\ 2x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

$2°)\begin{cases} \lambda = 1/3 \\ x - 1 = \frac{2}{3}x \Rightarrow \frac{x}{3} = 1 \Rightarrow x = 3 \\ 18 + 3y^2 = 6 \quad \text{impossibile} \end{cases}$

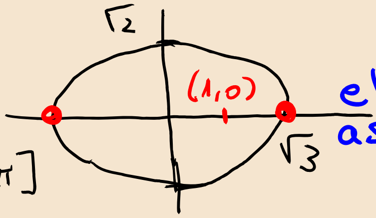
$P_1 = (\sqrt{3}, 0)$, $P_2 = (-\sqrt{3}, 0)$

$f(P_1) = (\sqrt{3}-1)^2 \quad f(P_2) = (\sqrt{3}+1)^2 \Rightarrow d_{max} = 1 + \sqrt{3}$ in P_2

$d_{min} = -1 + \sqrt{3}$ in P_1

Altro metodo: parametrizzazione.

$2x^2 + 3y^2 = 6 \Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$



ellisse di semi-assi $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \underline{r}(t) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow$ Studio $h(t) = (\sqrt{3}\cos t - 1)^2 + 2\sin^2 t = 3\cos^2 t - 2\sqrt{3}\cos t + 1$

$+ 2\sin^2 t = \cos^2 t - 2\sqrt{3}\cos t + 3. \Rightarrow$ Calcolo gli zeri di $h'(t)$.

se $t_0 \,/\, h'(t_0) = 0 \Rightarrow P_0 = \underline{r}(t_0)$ $\quad [P_1 = \underline{r}(0),\ P_2 = \underline{r}(\pi)]$

Finire e provare a cambiare punto, es: $P = (1, 1)$.

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE A DIM. $n \geq 3$

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(A)$, A aperto, e siano $g_1 \dots g_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$g_j \in C^1(A)$, $j = 1, 2 \dots r$, $1 \leq r \leq n-1$ i vincoli assegnati.

<u>Teorema</u> Sia $\underline{x}_0$ un punto di massimo o minimo per f vincolato a $\Gamma = \{ \underline{x} : g_1(\underline{x}) = 0, \dots g_r(\underline{x}) = 0 \}$, con $\nabla g_j(\underline{x}_0) \neq \underline{0}$ e ∇g_j lin. indipendenti, allora: $\exists \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_r \in \mathbb{R}$ t.c.

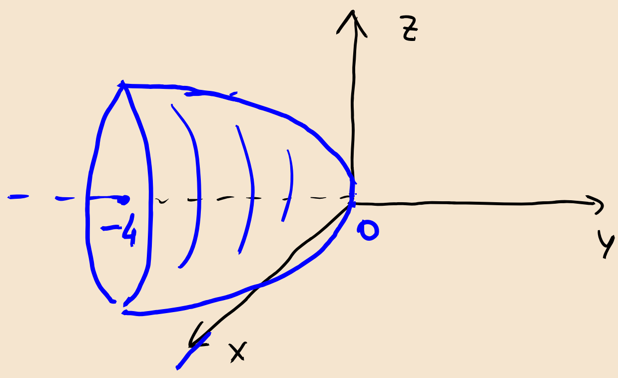
$$\nabla f(\underline{x}_0) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \nabla g_j(\underline{x}_0)$$

$\Rightarrow$ I massimi e minimi vincolati si trovano come soluzioni di:

$$\nabla f(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \nabla g_j(\underline{x}), \quad g_1(\underline{x}) = 0, \dots, g_r(\underline{x}) = 0.$$

$\Rightarrow (n+r)$ equazioni in $(n+r)$ incognite.

<u>ES.</u> Determinare il massimo e minimo assoluto di $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 6z + 1$ sul vincolo $x^2 + y + z^2 = 0$, $-4 \leq y \leq 0$.



<u>1° passo</u>: Studio f sul vincolo $x^2 + y + z^2 = 0$ con Lagrange, prendendo solo i punti con $-4 \leq y \leq 0$.

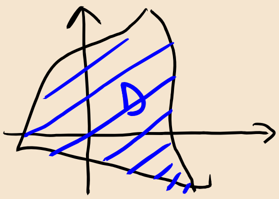
<u>2° passo</u> Studio f sul bordo della superficie, cioè sulla circonferenza

$$\begin{cases} y = -4 \\ x^2 + z^2 + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

⇒ usare la parametrizzazione $\underline{r}(t) = (2\cos t, -4, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI SU INSIEMI CHIUSI E LIMITATI

Sia D chiuso e limitato $\subset \mathbb{R}^2$, $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto $A \supset D$, $f \in C^1(A)$. Per determinare il massimo e il minimo assoluto di f in D si seguono i seguenti passi:



1) Trovo i punti critici interni a D ($\mathring{D}$ è aperto) → ottimizzazione libera ⇒ $Df = \underline{0}$
(prendo solo i punti interni - no fuori - no sulla frontiera): $P_1 .. P_n$

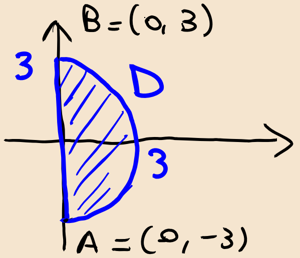
2) Suddivido la frontiera ∂D negli archi regolari
$\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup .. \cup \gamma_n$ e su ognuno degli archi utilizzo Lagrange o il metodo di parametrizzazione per trovare i max e min vincolati: $Q_1, Q_2 .. Q_s$

3) Prendo i punti di non regolarità di ∂D: $A_1 .. A_k$.

4) Calcolo f in $P_1 .. P_n$, $Q_1 .. Q_s$, $A_1 .. A_k$.

il valore massimo è il massimo di f in D
" minimo " il minimo di f in D.

Esercizio. Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)(x+y)$ sul semicerchio $x^2+y^2 \leq 9$, $x \geq 0$



1) Punti critici interni: $\nabla f = \underline{0}$

$$\begin{cases} -2x(x+y) + (1-x^2-y^2)\cdot 1 = 0 \\ -2y(x+y) + (1-x^2-y^2)\cdot 1 = 0 \end{cases}$$

per sottrazione: $\begin{cases} -2(x-y)(x+y) = 0 \\ -2y(x+y) + 1 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} x=y \\ x=-y \end{matrix}$

i) $\begin{cases} x = y \\ -4x^2 + 1 - 2x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1/6$

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ($x = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ non accett.)

ii) $\begin{cases} x = -y \\ 1 - 2x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1/2$

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ non accett.)

$\Rightarrow P_1 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2) $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \Rightarrow$ punti critici vincolati su γ_1 e γ_2

$\underline{r}_1(t) = (0, t)$, $-3 \leq t \leq 3$

$\underline{r}_2(t) = (3\cos t, 3\sin t)$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ (svolgere i calcoli)

$\rightarrow Q_1 = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $Q_2 = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $Q_3 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

3) Calcolo f in $P_1, P_2, Q_1, Q_2, Q_3, A, B$.

Max $= 24$ in A

Min $= -24\sqrt{2}$ in B.

Per esercizio: studiare il segno di f in $D \Rightarrow$

Soluzione: