Esempi di uso del teorema del rotore e della divergenza:

dalle leggi globali alle leggi puntuali:

1) Dalla legge di Gauss alla 1° legge di Maxwell.

legge di Gauss: $\Phi_{\partial D}(\underline{E}) = 4k\pi\, q_{INT}$

le flusso uscente da una superficie chiusa del campo elettrostatico $\underline{E}$ è proporzionale alla carica totale contenuta nel volume racchiuso dalla superficie.

Legge globale: $$\iint_{\partial D} (\underline{E}\cdot\underline{n})\, dS = 4k\pi \overbrace{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}^{q_{INT}}$$

ρ = densità di carica.

Per avere due integrali dello stesso tipo uso il teo. della divergenza.

$$\Phi_{\partial D}(\underline{E}) = \iint_{\partial D} (\underline{E}\cdot\underline{n})\, dS = \iiint_D \operatorname{div}\underline{E}\; dx\,dy\,dz.$$

$$\Rightarrow \iiint_D (\operatorname{div}\underline{E})\, dx\,dy\,dz = 4k\pi \iiint_D \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

$$\Rightarrow \iiint_D (\operatorname{div}\underline{E} - 4k\pi\rho)\, dx\,dy\,dz = 0 \qquad \forall D$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}\underline{E} = 4k\pi\rho}$$

legge puntuale $E_x + E_y + E_z = 4k\pi\rho(x,y,z)$

$\underline{E} = \underline{E}(x,y,z)$

1° legge di Maxwell.

ES. 2 dalla legge di Neumann alla 3° eq. di Maxwell

$$-\frac{d}{dt}\Phi_{\Sigma}(\underline{B}) = L_{\partial\Sigma^+}(\underline{E})$$

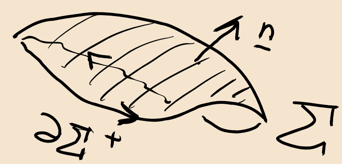
legge di Neumann (legge globale)

$\underline{B}$ = campo magnetico variabile, $\underline{B} = \underline{B}(t, x, y, z)$

$\underline{E}$ = campo elettrico, $\underline{E} = \underline{E}(t, x, y, z)$.

Il campo magnetico variabile induce un campo elettrico – La corrente prodotta si oppone alla variazione del flusso del campo magnetico. (principio di conservazione dell'energia).

$$-\frac{d}{dt}\iint_{\Sigma}(\underline{B}\cdot\underline{n})\,dS = \int_{\partial\Sigma^+}\underline{E}\cdot d\underline{P}$$



Per il teorema del rotore:

$$L_{\partial\Sigma^+}(\underline{E}) = \Phi_{\Sigma}(\mathrm{rot}\,\underline{E}) = \iint_{\Sigma}(\mathrm{rot}\,\underline{E}\cdot\underline{n})\,dS.$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dt}\iint_{\Sigma}(\underline{B}\cdot\underline{n})\,dS = \iint_{\Sigma}(\mathrm{rot}\,\underline{E}\cdot\underline{n})\,dS$$

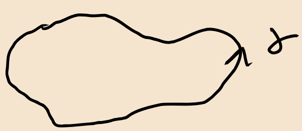
$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} -\left(\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}\cdot\underline{n}\right)dS = \iint_{\Sigma}(\mathrm{rot}\,\underline{E}\cdot\underline{n})\,dS$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma}\left(\mathrm{rot}\,\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{B}\right)\cdot\underline{n}\,dS = 0 \qquad \forall\,\Sigma$$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \text{rot } \underline{E} = 0}$ legge puntuale
3° legge di Maxwell

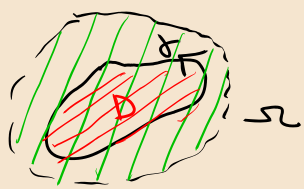
Teorema del rotore e verifica della conservatività di un campo.

Sia $\underline{F} \in C^1(\Omega)$, Ω aperto connesso in $\mathbb{R}^2$, $\text{rot } \underline{F} = \underline{0}$.
Verifica della conservatività mediante lavoro su curve chiuse.



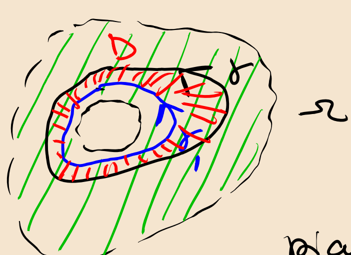
Sia γ regolare (a tratti) semplice e chiusa, $\gamma \subset \Omega$.

1° caso: interno di γ tutto contenuto in Ω. $(\partial D^+ = \gamma)$



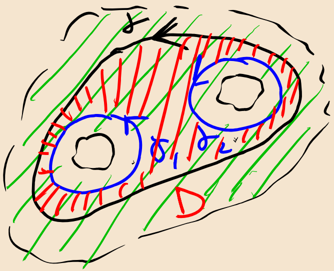
Poiché: $L_{\partial D^+}(\underline{F}) = \iint_D (\text{rot } \underline{F} \cdot \underline{k})\, dx\, dy$
e $\text{rot } \underline{F} = \underline{0} \Rightarrow L_\gamma(\underline{F}) = 0$.

2° caso



Sia γ t.c. interno non tutto contenuto in Ω,
prendo γ_1 chiusa, semplice, regolare (a tratti) interna a γ e contenuta in Ω. $\Rightarrow$ La parte di piano D esterna a γ_1 e interna a γ è contenuta in Ω. $\Rightarrow \partial D^+ = \gamma \cup (-\gamma_1) \Rightarrow L_{\partial D^+}(\underline{F}) = L_\gamma(\underline{F}) - L_{\gamma_1}(\underline{F}) = 0$
$\Rightarrow L_\gamma(\underline{F}) = L_{\gamma_1}(\underline{F})$

3° caso



$$\partial D^+ = \gamma \cup (-\gamma_1) \cup (-\gamma_2) \Rightarrow$$

$$L_{\partial D^+}(\underline{F}) = L_\gamma(\underline{F}) - L_{\gamma_1}(\underline{F}) - L_{\gamma_2}(\underline{F}_2) = 0$$

$$\Rightarrow L_\gamma(\underline{F}) = L_{\gamma_1}(\underline{F}) + L_{\gamma_2}(\underline{F}).$$

Allora:

se $L_{\gamma_1}(\underline{F}) = 0$ e $L_{\gamma_2}(\underline{F}) = 0 \Rightarrow \underline{F}$ conservativo

se $L_{\gamma_1}(\underline{F}) \neq 0$ e/o $L_{\gamma_2}(\underline{F}) \neq 0 \Rightarrow \underline{F}$ non conservativo.

e così via ...

Dunque per verificare se $\underline{F}$ è conservativo, è sufficiente calcolare il lavoro su una curva (a scelta) chiusa che racchiude ogni "buco"