Risoluzione es. 4 su superfici parametriche

La superficie Σ_1 è il grafico di $f(x,y) = e^{x^2y} - y^2$, per $(x,y) \in D$
$D = \{(x,y) : |x+y| \leq 1,\ |x| \leq 1\}$. Dunque è una superficie cartesiana
e la sua parametrizzazione standard è:

$$S(x,y) = (x,y,\ e^{x^2y} - y^2) \text{ per } (x,y) \in D.$$

Infatti un punto (x,y,z) appartiene al grafico di f se $(x,y) \in D$ e
$z = f(x,y)$.

Essendo $\underline{N}(x,y) = S_x \wedge S_y = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$, si ha:
$\underline{N} = (-2xy\, e^{x^2y},\ -x^2 e^{x^2y} + 2y,\ 1)$ e $N(0,0) = (0,0,1)$,
$\underline{N}(-\frac{1}{2}, 1) = (e^{1/4},\ -1/4\, e^{1/4} + 2,\ 1)$. Essendo l'equazione del
piano tangente: $(P - P_0) \cdot \underline{N} = 0$ con $P = (x,y,z)$, si ha subito che
il piano tangente in $P_0 = (0,0,\ )$ è: $[(x,y,z) - (0,0,1)] \cdot (0,0,1) = 0$
ossia: $z = 1$.

Il piano tangente in $P_0 = (-\frac{1}{2}, 1, e^{1/4} - 1)$ è:

$$\left[(x,y,z) - (-\tfrac{1}{2}, 1, e^{1/4} - 1)\right] \cdot \left(e^{1/4}, -\tfrac{1}{4} e^{1/4} + 2, 1\right) = 0, \text{ ossia}$$

$$e^{1/4}(x + \tfrac{1}{2}) + (y-1)(-\tfrac{1}{4} e^{1/4} + 2) + (z - e^{1/4} + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$e^{1/4} x + (2 - \tfrac{e^{1/4}}{4})y + z = 1 + \tfrac{e^{1/4}}{4}$$

Nota bene. Il dominio D dove variano le variabili x e y NON ha alcun ruolo nella scrittura della parametrizzazione! Limita soltanto la superficie, la cui parametrizzazione sarebbe la stessa con un diverso dominio D.