Esercizi

1. Determinare le derivate parziali di
$$f(x, y, z) = \exp(xz) + zy - \sin(xyz) + \cos(xy^3)$$

2. Scrivere l'equazione del piano tangente e della retta normale al grafico della funzione
$$f(x, y) = \ln(xy) + \cos(x + y)$$
nel punto $P = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}))$

3. Data la funzione
$$f(x, y, z) = e^{x^2y^3} \sin(x + z)$$
calcolare il gradiente e la derivata direzionale in $P = (0, 5, \pi)$ lungo la direzione $\vec{w} = (1, 2, 1)$ (notare che $\vec{w}$ non è un versore).

4. Determinare il piano tangente alla superficie grafico di $f(x, y) = e^x \sin(y)$ in $(1, \pi, f(1, \pi))$.

5. Sia $g(t) = \ln t$, sia $f(x, y) = e^x \sin y$ e sia $h(x, y) = g(f(x, y))$. Calcolare il gradiente di $h(x, y)$.

6. Determinare, mediante lo studio delle curve di livello, i massimi e minimi di
$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + 1}$$
in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$

7. Determinare, mediante lo studio delle curve di livello, i massimi e minimi di
$$f(x, y) = x^2 - y^2$$
in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$

8. Determinare se la funzione
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy \arctan(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
è continua in $\mathbb{R}^2$.

9. Dimostrare che la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & xy = 0 \\ \\ 1 & xy \neq 0 \end{cases}$$
non è continua ma è derivabile in $(0,0)$.

10. Sia data
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x) - \sin^2(y)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Calcolare, se esistono, $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $D_{\vec{v}} f(0,0)$, con $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

11. Determinare i punti di accumulazione di $f(x,y) = \exp\{-x^4/y^2\}$ in cui la f può essere estesa con continuità

12. Sia data
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(e^{x^3}-1)(1-\cos y)}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Dimostrare che $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$ e stabilire se la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

13. Sia data
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+xy^2}{x^2+y^2+x^2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Stabilire se $f(x,y)$ è continua, derivabile e differenziabile in $(0,0)$.

14. Studiare la natura dei punti critici di
$$f(x,y) = 2x^3 + 6xy + y^2$$

15. Determinare gli estremi assoluti di
$$f(x,y) = \exp\{x^2+y^2\} - \frac{x^2}{2} - y^2$$
nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 3x^2+4y^2 \leq 4, \quad y \geq 1/2\}$

16. Determinare gli estremi assoluti di

$$f(x,y) = (1 + x^2 + y)\exp(x - y)$$

in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1\}$

17. Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)(x + y)$$

nel semicerchio $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, \;\; x \geq 0\}$

18. Determinare gli estremi assoluti di

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + xy + 2y^2}$$

in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

19. Sia

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad (|x| - 1)^2 + y^2 \geq 1\}$$

   a) Disegnare E.
   b) Descrivere ∂E mediante una o più curve parametriche.
   c) Determinare i massimi assoluti di $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ in E.

20. Mediante la regola del Nord-Ovest per ciascuna delle seguenti funzioni determinare l'insieme dei punti critici e stabilire, ove possibile, la natura

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz$$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz$$

21. Sia dato l'insieme

$$D = \{(x,y) : \; |x| \leq 2, |y| \leq 1\} \cup \{(x,y) : \; x^2 + (|y| - 1)^2 \leq 4\}$$

Determinare, mediante lo studio delle curve di livello, il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = |x| + |\min\{|y|, y^2\} - 1|$$

in D.

22. Calcolare, mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 + xy)^2$$

soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 1$.

23. Calcolare, mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, gli estremi della funzione

$$f(x, y) = (1 + xy)^2$$

soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 1$.

24. Calcolare, mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, gli estremi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

soggetta al vincolo $x^4 + y^4 = 1$.

25. Calcolare, mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, gli estremi della funzione

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - z^3 + 6$$

soggetta al vincolo $x^2 + z^2 + y = 0$.

26. Determinare fra i parallelepipedi di superficie totale $S_T = 54$ quello di volume massimo (Utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange).

27. Trovare, tra i punti della curva

$$g(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$$

quelli a distanza massima ed a distanza minima dall'origine degli assi.

28. Calcolare

$$\iint_\Omega xe^y dxdy$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq 1, \ \ |y| \leq x^2\}$.

29. Calcolare

$$\iint_\Omega x^2 y dxdy$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq y \leq 1\}$.

30. Calcolare
$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$$
dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2/2 \le y \le x^2, \ \ 1 < x < 2\}$.

31. Calcolare
$$\iint_\Omega |\ln(xy)|dxdy$$
dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 \le y \le 2, \ \ x \ge 1/2\}$.

32. Calcolare
$$\iint_\Omega xydxdy$$
dove Ω è il semicerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1 contenuto nel semipiano delle ordinate positive [Suggerimento: utilizzare le coordinate polari].

33. Calcolare l'area della regione di piano racchiusa dall'ellisse
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$
Calcolare poi
$$\iint_\Omega \exp(9x^2 + 16y^2)dxdy$$

34. Calcolare l'integrale doppio
$$\iint_\Omega (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}dxdy$$
dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y \ge 1, \quad x^2 + y^2 \le 1\}$

35. Calcolare l'integrale doppio
$$\iint_\Omega ydxdy$$
dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \ge 1, \ \ y \ge 0, \ \ x^2 + y^2 \le 2\}$

36. Sia E il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$ e $(1,0,1)$. Disegnare E e calcolare
$$\iiint_E [(xy) + \sin(\pi z)]\, dxdydz$$

37. Sia E l'intersezione tra la palla di raggio 1 centrata nell'origine e il cono $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z \geq 0, \quad 3(x^2 + y^2) \leq z^2\}$. Disegnare E e calcolare

$$\iiint_E y^2 z dx dy dz$$

38. Disegnare la regione

$$D = \left\{ (x, y) : \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\}$$

e calcolarne l'area. Determinare poi il baricentro.

39. Si calcoli il lavoro compiuto dal campo di forze

$$\vec{f}(x, y, z) = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$$

lungo la curva intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con il piano $z = y \tan \theta$, $(0 < \theta < \pi/2)$, percorsa una volta nel verso che viene visto come antiorario se guardato dall'alto al di sopra del piano xy.

40. Si consideri un filo semicircolare omogeneo di raggio a. Si mostri che il centroide sta sull'asse di simmetria a una distanza $2a/\pi$ dal centro. Si mostri che il momento di inerzia rispetto al diametro congiungente gli estremi del filo è $(Ma^2)/2$.

41. Un filo è disposto lungo la circonferenza $x^2 + y^2 = a^2$. Se la densità del punto è $\rho(x, y) = |x| + |y|$, si determinino la massa e il momento di inerzia rispetto a un diametro.

42. Un campo di forze piano abbia in coordinate polari la forma

$$F(r, \theta) = -4 \sin \theta \vec{i} + 4 \sin \theta \vec{j}$$

Si calcoli il lavoro che esso compie quando una particella si muove dal punto $(1, 0)$ all'origine lungo la spirale di equazione polare $r = e^{-\theta}$

43. Un campo di forze $\vec{F}$ è detto radiale (o anche centrale) se esso ha la forma $\vec{F}(x, y) = f(r)\vec{r}$, dove $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ e $r = \|\vec{r}\|$. Si mostri che esso è sempre conservativo.

44. Si calcoli il lavoro compiuto dal campo di forze $\vec{F}(x, y) = (3y^2 + 2)\vec{i} + 16x\vec{j}$ se una particella si muove tra i punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ lungo la metà superiore dell'ellisse $b^2x^2 + y^2 = b^2$. Per quale ellisse (cioè per quale valore di b) è minimo tale lavoro?

45. Dei seguenti campi vettoriali calcolare rotore e divergenza

$$\vec{f}(x,y,z) = 2x^2\vec{i} + \sin y\vec{j} + e^{z^2}\vec{k}$$

$$\vec{f}(x,y,z) = yz\vec{i} - x\cos z\vec{j} + ye^x\vec{k}$$

46. Sia dato l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x| + |y| \leq 4\right\}$$

e sia

$$f(x,y) = y - \frac{x^2}{4}$$

Disegnare D e determinare, se esistono, gli estremi assoluti e relativi di f su D ed i punti in cui tali estremi sono assunti. Calcolare poi

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

47. Si consideri la curva in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\vec{\varphi}(t) = \begin{cases} x = \sin(t)\cos(3t) \\ y = \cos(t) \\ z = \sin(t)\sin(2t) \end{cases}$$

È regolare? È semplice? È chiusa? Verificare che il suo sostegno è contenuto nella sfera centrata nell'origine di raggio 1. trovare i punti $\varphi(t)$ sul sostegno della curva per cui la retta tangente alla curva in $\varphi(t)$ è contenuta in un piano parallelo al piano coordinato $z = 0$.

48. Determinare la posizione del baricentro di una lamina che occupa la regione $\rho \leq 2(1 + \cos\theta)$ la cui densità è $d(\rho,\theta) = \rho$

49. Si considerino gli insiemi

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z^2 = x^2 + y^2\}, \qquad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = 1 + x\}$$

Disegnare A. Identificare gli insiemi A e B. Si consideri poi la curva parametrica

$$\varphi : t \in [-2,2] \to \varphi(t) = \left(\frac{t^2-1}{2}, t, \frac{t^2+1}{2}\right)$$

Verificare che il supporto di φ è contenuto in $A \cap B$. Esplicitare la lunghezza di φ. Si consideri poi il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y)$$

Verificare che il prodotto scalare tra il campo vettoriale ed il vettore tangente alla curva $\vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ è positivo in ogni punto della curva ed è crescente lungo la curva.