Esercizi svolti a lezione su Campi vettoriali e lavoro

⋆ Campi conservativi e potenziale

1. Mostrare che il seguente campo vettoriale è conservativo, calcolandone una funzione potenziale
$$\underline{F}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\ \underline{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\ \underline{j}.$$
Il dominio del campo è un insieme semplicemente connesso?

2. Mostrare che il seguente campo vettoriale è conservativo, calcolandone una funzione potenziale
$$\underline{F}(x,y,z) = (xy - \sin z)\ \underline{i} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}\right)\underline{j} + \left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right)\underline{k}.$$
Il dominio del campo è un insieme semplicemente connesso?

3. Calcolare rotore e divergenza del campo
$$\underline{F}(x,y,z) = (xy, y^2 - z^2, yz).$$
Il campo è conservativo?

4. Dato il campo vettoriale
$$\underline{F}(x,y,z) = 3x^2y\ \underline{i} + x^3\ \underline{j} - \frac{1}{z}\ \underline{k},$$
definito nel dominio $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, verficare che è conservativo. Determinare poi il potenziale $U(x,y,z)$ mediante integrazione diretta delle componenti di $\underline{F}$ e mediante il calcolo del lavoro da un punto del dominio E al punto (x,y,z) lungo una spezzata γ parallela agli assi coordinati.

5. Mostrare che il campo
$$\underline{F}(x,y,z) = (x+z)\,\underline{i} - (y+z)\,\underline{j} + (x-y)\,\underline{k}$$
è conservativo in $\mathbb{R}^3$ e calcolare il potenziale $U(x,y,z)$ mediante integrale di seconda specie da un punto del dominio al punto (x,y,z) lungo una spezzata γ parallela agli assi coordinati. Calcolare infine il lavoro del campo $\underline{F}$ lungo una linea C che congiunge $(0,0,0)$ con $(2,2,1)$

6. Dire per quali valori del parametro reale α il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = (\alpha xz + \frac{yz}{x})\,\underline{i} + (z\ln x - \frac{\alpha^2 y}{2}\ln z)\,\underline{j} + (x^\alpha + y\ln x - \frac{y^2}{z})\,\underline{k}$$

è conservativo in $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, \quad z > 0\}$. Per i valori α determinati, calcolare il potenziale di $\underline{F}$ che si annulla in $(1,1,1)$.

⋆ Lavoro

1. Calcolare il lavoro del campo

$$\underline{F}(x,y) = -y\ \underline{i} + x\ \underline{j}$$

i) lungo la circonferenza di raggio 1 e centro l'origine, percorsa in senso orario.
ii) lungo l'arco di spirale $\rho = \theta$, con $\theta \in [0, 2\pi]$.
Il campo è conservativo?

2. Calcolare

$$\int_\gamma (x^2 + xy)\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy$$

dove γ è l'arco di parabola $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, percorsa nel senso delle x crescenti.
Il campo vettoriale associato è conservativo?

3. Calcolare il lavoro lungo γ del campo

$$\underline{F}(x,y) = \cos x\,\underline{i} - y\,\underline{j}$$

dove γ è la curva $y = \sin x$ per $x \in [0, \pi]$.

4. Calcolare il lavoro del campo

$$\underline{F}(x,y) = y\,\underline{i} + x^2\,\underline{j}$$

lungo la frontiera ∂S dell'insieme

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}, \quad y \leqslant x + 1\}$$

$\star$ Applicazioni del teorema di Gauss-Green nel piano

1. Calcolare l'area dell'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\partial D} (x - y^3)\, dx + (y^3 + x^3)\, dy$$

dove ∂D è la frontiera, percorsa in senso antiorario, del quarto di disco di centro l'origine e raggio 3 contenuto nel primo quadrante.

3. Sia γ una curva chiusa semplice e regolare, orientata positivamente, di equazione $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$. Se γ è frontiera di un dominio Ω, dimostrare che

$$Area(\Omega) = \frac{1}{2} \int_a^b \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} dt$$

Calcolare quindi l'area racchiusa dall'astroide di equazione

$$\underline{r}(t) = (\cos t)^3 \underline{i} + (\sin t)^3 \underline{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

4. Calcolare

$$\iint_\Omega x^2 dx dy$$

dove

$$\Omega = \{(x, y) : \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$$

trasformando l'integrale doppio in integrale di linea di seconda specie mediante il teorema di Gauss-Green.

5. Sia Ω la lamina omogenea (densità costante ρ) delimitata dalla cicloide di equazione

$$\gamma(t) = (t - \sin t)\underline{i} + (1 - \cos t)\underline{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

e dall'asse delle x. Calcolare le coordinate del baricentro utilizzando il teorema di Gauss Green.