

ESERCIZI SVOLTI A LEZIONE SU FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI.  
- PARTE I

★ DETERMINAZIONE DEL DOMINIO

1. Determinare il dominio della funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da

$$f(x, y) = (\sqrt{x^2 - y}, \log(x - y))$$

e rappresentarlo nel piano. Stabilire inoltre se tale insieme è aperto, chiuso, limitato, connesso, compatto.

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = 1 - \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}$$

e rappresentarlo nel piano. Stabilire inoltre se tale insieme è aperto, chiuso, limitato, connesso, compatto.

3. Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \arcsin(x - y) \log(x^2 + y^2 - 4)$$

e rappresentarlo nel piano. Stabilire inoltre se tale insieme è aperto, chiuso, limitato, connesso, compatto.

4. Determinare il dominio di

$$f(x, y) = \arcsin(xy - y - 2x)$$

e rappresentarlo nel piano. Stabilire inoltre se tale insieme è aperto, chiuso, limitato, connesso, compatto.

5. Indicati rispettivamente con  $A$  e  $B$  i domini delle funzioni

$$f_A(x, y) = \ln(1 - x^2) - \ln(y^2 - 4)$$

$$f_B(x, y) = \ln\left(\frac{1 - x^2}{y^2 - 4}\right)$$

determinare se vale  $A = B$ ,  $A \subset B$  or  $B \subset A$ .

6. Rappresentare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{2x - (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - x}}.$$

Stabilire inoltre se tale insieme è aperto, chiuso, limitato, connesso, compatto.

7. Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \arccos\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 2\right)$$

e rappresentarlo nel piano. Stabilire inoltre se tale insieme è aperto, chiuso, limitato, connesso, compatto.

8. Rappresentare l'insieme di definizione di

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\ln(2 - (x^2 + y^2))}$$

### ★ CURVE DI LIVELLO

1. Determinare le curve di livello della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}.$$

Stabilire quindi se la funzione ammette massimo e/o minimo assoluto.

2. Determinare, mediante lo studio delle linee di livello, il massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 9$$

sull'insieme  $D = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ . Osservare che tale insieme è compatto.

3. Rappresentare le curve di livello di

$$f(x, y) = \frac{1 + xy}{x^2}$$

4. Determinare le curve di livello della funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(1 + x^2 + y^2).$$

La funzione ammette massimo e/o minimo assoluto?

★ CALCOLO DI LIMITI

1. Mostrare che la funzione

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

non ammette limite nell'origine.

2. Stabilire se esistono i seguenti limiti, e, in caso affermativo, calcolarli.

$$\begin{array}{ll} \text{I)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}, & \text{II)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sin(xy)}{x}, \\ \text{III)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + (y-1)^2}, & \text{IV)} \quad \lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{array}$$