

## ESERCIZI SU FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI. - PARTE II

### ★ DERIVATE PARZIALI, DERIVATE DIREZIONALI, PIANO TANGENTE

1. Data la funzione

$$f(x, y, z) = e^{x^2 y^3} \sin(x + z)$$

calcolarne il gradiente e la derivata direzionale in  $P = (0, 5, \pi)$  lungo la direzione individuata dal vettore  $\underline{w} = (1, 2, 1)$  (attenzione che  $w$  non è un versore).

2. Determinare il piano tangente a

$$f(x, y) = e^x \sin y$$

nel punto  $(1, \pi)$

3. Date la funzione  $g(t) = \ln t$ , sia  $h(x, y) = g(f(x, y))$ , dove  $f$  è la funzione definita al precedente esercizio. Calcolare il gradiente di  $h$ .

### ★ PUNTI CRITICI

1. Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 - zy^2 + xz$$

2. Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = xy e^{-(x^2+y^2)/2}$$

### ★ STUDIO DELLA NATURA LOCALE DEI PUNTI CRITICI

1. Determinare la natura locale dei punti critici delle funzioni agli esercizi 1. e 2. del precedente paragrafo.
2. Determinare la natura locale dei punti critici della funzione

$$f(x, y) = 2x^3 + 6xy + y^2.$$

3. Date le funzioni

$$g_1(x, y) = e^{-f(x, y)}, \quad g_2(x, y) = \sqrt{f(x, y)}$$

dove  $f(x, y)$  è la funzione al precedente esercizio, determinarne i punti critici e la loro natura locale.

4. Dimostrare che il punto  $P = (0, 0)$  è un punto di minimo assoluto per la funzione

$$f(x, y) = x^4 + x^2y + y^2 + 3.$$

#### ★ MASSIMO E MINIMO ASSOLUTO

1. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x$$

nel cerchio di centro l'origine e raggio 1.

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)(x + y)$$

sul semicerchio  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ .

3. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2 - x + y}$$

nel quadrato  $Q = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ .

#### ★ METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

1. Calcolare, tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, gli estremi della funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 + xy)^2,$$

soggetta al vincolo

$$x^2 + y^2 = 1.$$

2. Calcolare, tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, gli estremi della funzione

$$f(x, y) = (1 + xy)^2,$$

soggetta al vincolo

$$x^2 + y^2 = 1.$$

3. Calcolare, tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, gli estremi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

soggetta al vincolo

$$x^4 + y^4 = 1.$$

4. Calcolare, tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, gli estremi della funzione

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - z^3 + 6$$

soggetta al vincolo

$$x^2 + z^2 + y = 0.$$