Esercizi svolti a lezione su Funzioni di più variabili. - Parte II

⋆ Derivate parziali, derivate direzionali, piano tangente

1. Data la funzione
$$f(x,y,z) = e^{x^2y^3}\sin(x+z)$$
calcolarne il gradiente e la derivata direzionale in $P = (0,5,\pi)$ lungo la direzione individuata dal vettore $\underline{w} = (1,2,1)$ (attenzione che w non è un versore).

2. Determinare il piano tangente a
$$f(x,y) = e^x \sin y$$
nel punto $(1,\pi)$

3. Date la funzione $g(t) = \ln t$, sia $h(x,y) = g(f(x,y))$, dove f è la funzione definita al precedente esercizio. Calcolare il gradiente di h.

⋆ Punti critici

1. Determinare i punti critici della funzione
$$f(x,y,z) = x^2 - zy^2 + xz$$

2. Determinare i punti critici della funzione
$$f(x,y) = xy\, e^{-(x^2+y^2)/2}$$

⋆ Studio della natura locale dei punti critici

1. Determinare la natura locale dei punti critici delle funzioni agli esercizi 1. e 2. del precedente paragrafo.

2. Determinare la natura locale dei punti critici della funzione
$$f(x,y) = 2x^3 + 6xy + y^2.$$

3. Date le funzioni
$$g_1(x,y) = e^{-f(x,y)}, \quad g_2(x,y) = \sqrt{f(x,y)}$$
dove $f(x,y)$ è la funzione al precedente esercizio, determinarne i punti critici e la loro natura locale.

4. Dimostrare che il punto $P = (0,0)$ è un punto di minimo assoluto per la funzione
$$f(x,y) = x^4 + x^2 y + y^2 + 3.$$

$\star$ Massimo e minimo assoluto

1. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione
$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x$$
nel cerchio di centro l'origine e raggio 1.

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione
$$f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)(x+y)$$
sul semicerchio $D = \{(x,y) : \, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

3. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione
$$f(x,y) = e^{x^2 - y^2 - x + y}$$
nel quadrato $Q = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

$\star$ Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

1. Calcolare, tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, gli estremi della funzione
$$f(x,y) = (x^2 + y^2 + xy)^2,$$
soggetta al vincolo
$$x^2 + y^2 = 1.$$

2. Calcolare, tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, gli estremi della funzione
$$f(x, y) = (1 + xy)^2,$$
soggetta al vincolo
$$x^2 + y^2 = 1.$$

3. Calcolare, tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, gli estremi della funzione
$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$
soggetta al vincolo
$$x^4 + y^4 = 1.$$

4. Calcolare, tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, gli estremi della funzione
$$f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - z^3 + 6$$
soggetta al vincolo
$$x^2 + z^2 + y = 0.$$