Esercizi su Integrali di linea di prima specie.

1. Determinare la massa totale della cicloide

$$\gamma(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

dove $R > 0$ è fissato, assumendo che la densità lineare sia $\rho(x, y) = 2$.

2. Determinare le coordinate del baricentro della semicirconferenza di centro l'origine e raggio $R > 0$, contenuta nel semipiano $y \geq 0$, assumendo che la densità lineare sia
i) $\rho(x, y) = 3$
ii) $\rho(x, y) = 2R - x$

3. Calcolare

$$\int_\gamma \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$$

dove γ è l'arco di spirale di equazione $x(t) = t \cos t$, $y(t) = t \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Sia γ l'arco di parabola di equazione $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 3$. Calcolare

$$\int_\gamma \sqrt{1 + x^2 + 3y}\, ds$$

5. Calcolare

$$\int_\gamma \sqrt{2y^2 + z}\, ds$$

dove γ è l'intersezione fra la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e il piano $x = y$.

6. Calcolare

$$\int_\gamma \left(x^2 + y^2\right) ds$$

essendo γ la curva di equazione polare $\rho = e^{2\theta}$, $\theta \in (-\infty, 0]$.

7. Calcolare l'area della superficie laterale del cilindro con generatrici parallele all'asse z, che ha come sezione col piano $z = 0$ l'ellisse di equazione

$$4x^2 + y^2 = 16$$

compresa tra il piano $z = 0$ e la superficie

$$f(x, y) = \sqrt{4 + 3x^2}$$

8. Un filo omogeneo, di densità lineare ρ costante, è disposto lungo la curva di equazione

$$\mathbf{r}(t) = a(\cos t + \sin t)\mathbf{i} + a(\sin t - t\cos t)\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 2\pi], \qquad a > 0$$

Calcolare il momento di inerzia I rispetto all'asse z.