Esercizi su Integrazione Multipla di funzioni di più variabili.

⋆ Integrali Doppi

1. Dato il triangolo T di vertici $(0,0),(2,0),(1,1)$, mostrare che esso è un dominio x-semplice, mentre è unione di due domini y-semplici.

2. Sia D l'insieme compreso tra le rette $y = x$ e $y = 1 - x$ per $0 \leq x \leq 1$. Scrivere T come unione di due domini y-semplici e come unione di due domini x-semplici.

3. Calcolare l'integrale di $f(x,y) = x + 2y$ nella regione compresa tra $y = x$ e $y = x^2$ per $0 \leq x \leq 2$.

4. Sia T il triangolo di vertici $(0,0),(2,0),(2,1)$. Calcolare
$$\iint_T xy\, dxdy$$

5. Sia T il triangolo di vertici $(0,0),(\pi,0),(\pi,1)$. Calcolare
$$\iint_T \frac{\sin x}{x}\, dxdy$$

6. Determinare il volume sotteso dal grafico della funzione $f(x,y) = 3 + x + y$ per $0 \leq y \leq 3 - \dfrac{x^2}{3}$

7. Determinare le coordinate del centro di massa del triangolo T di vertici $(0,0),(1,0),(0,1)$ assumendo che la densità superficiale sia
i) $\rho(x,y) = 1$
ii) $\rho(x,y) = 4(x+1)$

8. Calcolare
$$\iint_D \sin(y^3)\, dxdy$$
dove $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$.

9. Calcolare
$$\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$
dove $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y\}$.

10. Calcolare
$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dxdy$$
dove
i) $D = \{(x,y) : x^2+y^2 < 4, x > 0, y \geq 0\}$
ii) $D = \{(x,y) : 4 \leq x^2+y^2 \leq 9, x > 0, y > 0\}$

⋆ Integrali tripli

1. Sia E il tetraedro di vertici $(0,0,0),(1,0,0),(1,1,0)$ e $(1,0,1)$. Calcolare
$$\int\int\int_E (y+\sin z)dxdydz$$
2. Sia $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 6 - x^2 - y^2\}$. Calcolare
$$\int\int\int_E x\ln(1+y)dxdydz.$$
3. Sia E l'intersezione della palla di raggio 1 centrata nell'origine e il cono $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \geq 0, 3(x^2+y^2) \leq z^2\}$. Calcolare
$$\int\int\int_E y^2 z dxdydz$$
4. Provare che il volume di una sfera di $\mathbb{R}^3$ di raggio R è $(4\pi R^3/3)$. [Suggerimento: passare a coordinate sferiche]
5. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse z di un corpo S di densità costante $\rho = 1$, dove
$$S = \{(x,y,z) :\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.\}$$
6. Calcolare le coordinate del baricentro della calotta sferica S di densità costante 1
$$S = \{(x,y,z) :\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ z \geq \sqrt{R^2-r^2}\}$$
(R è il raggio della sfera, r è il raggio della calotta. [Suggerimento: utilizzare le coordinate cilindirche $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, z = z$].
7. Calcolare
$$\int\int\int_E (x^2+y^2)zdxdydz$$
dove E è il cilindro $0 \leq x^2+y^2 \leq 2,\ \ 0 \leq z \leq 3$.