

ESERCIZI SVOLTI A LEZIONE SU INTEGRAZIONE DI FUNZIONI
DI PIÙ VARIABILI.

★ INTEGRALI DI LINEA DI PRIMA SPECIE

1. Determinare la massa totale della cicloide

$$\gamma(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

dove $R > 0$ è fissato, assumendo che la densità lineare sia $\rho(x, y) = 2$.

2. Determinare le coordinate del baricentro della semicirconferenza di centro l'origine e raggio $R > 0$, contenuta nel semipiano $y \geq 0$, assumendo che la densità lineare sia

i) $\rho(x, y) = 3$

ii) $\rho(x, y) = 2R - x$

3. Calcolare

$$\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} ds$$

dove γ è l'arco di spirale di equazione $x(t) = t \cos t$, $y(t) = t \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Sia γ l'arco di parabola di equazione $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 3$. Calcolare

$$\int_{\gamma} \sqrt{1 + x^2 + 3y} ds$$

5. Calcolare

$$\int_{\gamma} \sqrt{2y^2 + z} ds$$

dove γ è l'intersezione fra la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e il piano $x = y$.

6. Calcolare

$$\int_{\gamma} (x^2 + y^2) ds$$

essendo γ la curva di equazione polare $\rho = e^{2\theta}$, $\theta \in (-\infty, 0]$.

7. Calcolare l'area della superficie laterale del cilindro con generatrici parallele all'asse z , che ha come sezione col piano $z = 0$ l'ellisse di equazione

$$4x^2 + y^2 = 16$$

compresa tra il piano $z = 0$ e la superficie

$$f(x, y) = \sqrt{4 + 3x^2}$$

8. Un filo omogeneo, di densità lineare ρ costante, è disposto lungo la curva di equazione

$$\mathbf{r}(t) = a(\cos t + \sin t)\mathbf{i} + a(\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad a > 0$$

Calcolare il momento di inerzia I rispetto all'asse z .

★ INTEGRALI DOPPI

1. Dato il triangolo T di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$, mostrare che esso è un dominio x -semplice, mentre è unione di due domini y -semplici.
2. Sia D l'insieme compreso tra le rette $y = x$ e $y = 1 - x$ per $0 \leq x \leq 1$. Scrivere T come unione di due domini y -semplici e come unione di due domini x -semplici.
3. Calcolare l'integrale di $f(x, y) = x + 2y$ nella regione compresa tra $y = x$ e $y = x^2$ per $0 \leq x \leq 2$.
4. Sia T il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$. Calcolare

$$\iint_T xy \, dx dy$$

5. Sia T il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\pi, 1)$. Calcolare

$$\iint_T \frac{\sin x}{x} \, dx dy$$

6. Determinare il volume sotteso dal grafico della funzione $f(x, y) = 3 + x + y$ per $0 \leq y \leq 3 - \frac{x^2}{3}$

7. Determinare le coordinate del centro di massa del triangolo T di vertici $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ assumendo che la densità superficiale sia
- i) $\rho(x, y) = 1$
 - ii) $\rho(x, y) = 4(x + 1)$

8. Calcolare

$$\iint_D \sin(y^3) \, dx dy$$

dove $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$.

9. Calcolare

$$\iint_D y \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$$

dove $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y\}$.

10. Calcolare

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \, dx dy$$

dove

i) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4, x > 0, y \geq 0\}$

ii) $D = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x > 0, y > 0\}$