Esercizi Di Riepilogo

1. Determinare i punti stazionari e la loro natura per la funzione

$$f(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\arctan\frac{y}{x}$$

definita nel dominio $\Omega = \{(x,y): \quad x > 0\}$

2. Si trovi il valore massimo e il valore minimo di

$$f(x,y,z) = x + 3y - z$$

nell'insieme G definito dalle equazioni

$$G: \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - z & = & 0 \\ \\ 2x + 4y - z & = & 0 \end{cases}$$

3. Usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per trovare la massima distanza di un punto sull'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$ dalla retta $x + y = 4$.

4. Un filo di densità $\rho(x,y) = |x| + |y|$ è disposto lungo la circonferenza $x^2 + y^2 = a^2$. Calcolare la massa del filo.

5. La forza di attrazione gravitazionale $\mathbf{F}$ è, in ogni punto dello spazio, il gradiente di una funzione $U(x,y,z)$, detta potenziale gravitazionale. Il potenziale gravitazionale generato da una sfera omogenea di raggio R, centrata nell'origine è

$$U(x,y,z) = \quad \begin{cases} 2\pi\rho\left(R^2 - \dfrac{r^2}{3}\right) & r < R \\ \\ \dfrac{4}{3}\pi R^3 \dfrac{\rho}{r} & r \geqslant R \end{cases}$$

dove ρ è la dinsità della sfera (supposta costante) e $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

   (a) Verificare che il potenziale è continuo in tutto lo spazio

   (b) Calcolare la forza $\mathbf{F}$

   (c) Calcolare la divergenza di $\mathbf{F}$.

6. Determinare i momenti di inerzia

$$I_x = \iint_\Omega x^2 \rho(x,y)dxdy, \qquad I_y = \iint_\Omega y^2 \rho(x,y)dxdy,$$

dove la densità è data da $\rho(x,y) = |x-y|$, per la lamina Ω

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x}\}.$$

7. Calcolare il lavoro del campo

$$\mathbf{F} = \frac{(x,y,-2z)}{2x^2+y^2+z^2}$$

lungo la curva $\gamma(t) = (t, 2t, t^2)$ con $t \in [1,2]$.

8. Sia γ una curva chiusa semplice e regolare, orientata positivamente, di equazione polare $\rho = f(\theta)$, con $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Se γ è frontiera di un dominio Ω, dimostrare che

$$area(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2 d\theta.$$

Calcolare poi l'area della cardioide

$$\rho = 1 + cos(\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$