Esercizi su Integrali di Superficie, Teorema Di Stokes e teorema della divergenza

1. Data la superficie parametrica
$$\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \frac{1}{2}u^2 \sin 2v), \qquad (u,v) \in [0, 2\pi)$$
determinare l'equazione cartesiana e calcolare la norma del prodotto vettore in forma parametrica e in forma cartesiana.

2. Data la superficie parametrica
$$\vec{r}(t,\theta) = (t^2\cos\theta, t, t^2\sin\theta) \qquad (t,\theta) \in \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$$
calcolare il piano tangente in $\vec{r}(1,0)$ e determinare l'equazione cartesiana.

3. Calcolare l'area del guscio sferico di raggio R mediante integrale di superficie.

4. Sia S la parte superiore della conica $x^2 + y^2 = z^2$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 2x$. Calcolare il valore dell'integrale
$$\int\int_S (x^4 - y^4 + y^2z^2 - z^2x^2 + 1)dS$$

5. Dimostrare che il momento di inerzia di un guscio sferico omogeneo (densità $\rho = 1$) attorno al suo diametro è uguale a $(2/3)mR^2$, dove m è la massa del guscio.

6. Sia $\vec{F}(x,y,z) = (x, -2x - y, z)$ il vettore densità di flusso di un fluido. Sia S l'emisfero $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, e $\vec{n}$ indichi la normale unitaria esterna della sfera. Calcolare la massa del fluido passante attraverso S nell'unità di tempo.

7. Calcolare mediante integrale curvilineo
$$\int\int_S (\text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n})dS$$
dove $\vec{F}(x,y,z) = (y, z, x)$, S è la parte di paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$, e $\vec{n}$ è la normale unitaria con terza componente non negativa.

8. Utilizzare il teorema di Stokes per dimostrare che l'integrale curvilineo

$$\int_C y^2dx + xydy + xzdz = 0$$

dove C è la curva di intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ e del piano $y = z$.

9. Siano $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ due campi scalari C^1 in un intorno contenente la superficie chiusa S di normale unitaria uscente $\vec{n}$ che racchiude il solido V. Indicheremo con

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \nabla f \cdot \vec{n}, \qquad \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} = \nabla g \cdot \vec{n}$$

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}, \qquad \Delta g = g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}.$$

L'operatore Δ prende il nome di Laplaciano. Dimostrare che

$$\int\int_S \left(f\frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \right) dS = \int\int\int_V (f\Delta g - g\Delta f)dxdydz.$$

Dimostrare inoltre che se f è armonica in V, cioè $\Delta f = 0$ in V, allora

$$\int\int_S f\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}dS = \int\int\int_V |\nabla f|^2 dxdydz$$

10. Dato il campo vettoriale $\vec{f}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$, indichiamo con $\Delta\vec{f} = (\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3)$. Dimostrare che

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{f}) = \nabla(\mathrm{div}\vec{f}) - \Delta\vec{f}$$

11. Calcolare l'area della superficie generata dalla rotazione della cicloide

$$x = t - \sin t, \qquad y = 1 - \cos t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

attorno all'asse delle x di un angolo giro.