Risoluzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Si consideri la EDO lineare a coefficienti costanti

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(t) \tag{EC}$$

dove $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots n-1$, e $f : I \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ è una funzione continua, e l'equazione omogenea ad essa associata

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0. \tag{EO}$$

Per determinare n soluzioni linearmente indipendenti della (EO) si procede come segue:

1. si considera l'equazione caratteristica associata alla (EO)
$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{1}$$
e se ne determinano tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$; esse saranno reali oppure complesse coniugate, e vanno contate con la loro molteplicità;

2. se λ_0 è una radice *reale* di (1) con molteplicità r, le seguenti funzioni sono r soluzioni linearmente indipendenti di (EO)
$$e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_0 t}, \ldots, t^{r-1}e^{\lambda_0 t};$$

3. se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ è una radice *complessa* di (1) con molteplicità s, anche $\overline{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ è radice di (EO) con la stessa molteplicità e le seguenti funzioni sono $2s$ soluzioni linearmente indipendenti di (EO)
$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots, t^{s-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots, t^{s-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Il procedimento sopra descritto fornisce l'integrale generale della (EO).

Per determinare l'integrale generale della (EC) basta sommare all'integrale generale della (EO) una soluzione particolare della (EC). Per determinare una soluzione particolare si può procedere con il seguente metodo, detto metodo di somiglianza; esso vale per funzioni $f(t)$ di tipo polinomiale, esponenziale e/o funzioni seno e coseno:

⋆ $\underline{f(t) = p_m(t) \text{ polinomio di grado } m \geq 0.}$

- se $\lambda = 0$ *non è radice* dell'equazione caratteristica (1), allora si cerca una soluzione particolare di (EC) della forma
$$y_p(t) = A_0 + A_1t + \cdots + A_mt^m$$
dove i coefficienti $A_j, j = 0, 1, \ldots, m$, devono essere determinati. Per fare ciò si calcolano le derivate di y_p fino all'ordine m e si sostituiscono in (EC); poiché due polinomi sono uguali se e solo se hanno i coefficienti dei monomi dello stesso grado uguali, si ottiene un sistema di $m + 1$ equazioni lineari nelle incognite $A_0, \ldots, A_m$, che risolto fornisce i coefficienti cercati.

- se $\lambda = 0$ *è radice* con molteplicità r dell'equazione caratteristica (1), allora si cerca una soluzione particolare di (EC) della forma
$$y_p(t) = t^r(A_0 + A_1 t + \cdots + A_m t^m).$$

⋆ $f(t) = p_m(t)e^{bt}$, con p_m polinomio di grado $m \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$.

- se $\lambda = b$ *non è radice* dell'equazione caratteristica (1), allora si cerca una soluzione particolare di (EC) della forma
$$y_p(t) = (A_0 + A_1 t + \cdots + A_m t^m)e^{bt}.$$
- se $\lambda = b$ *è radice* con molteplicità r dell'equazione caratteristica (1), allora si cerca una soluzione particolare di (EC) della forma
$$y_p(t) = t^r(A_0 + A_1 t + \cdots + A_m t^m)e^{bt}.$$

⋆ $f(t) = p_m(t)e^{bt}\sin(ct)$, oppure $f(t) = p_m(t)e^{bt}\cos(ct)$, con p_m polinomio di grado $m \geq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$.

- se $\lambda = b + ic$ *non è radice* dell'equazione caratteristica (1), allora si cerca una soluzione particolare di (EC) della forma
$$y_p(t) = (A_0 + A_1 t + \cdots + A_m t^m)e^{bt}\sin(ct) + (B_0 + B_1 t + \cdots + B_m t^m)e^{bt}\cos(ct),$$
dove sia i coefficienti A_j che i coefficienti B_j, $j = 1, \ldots, m$, devono essere determinati.
- se $\lambda = b + ic$ *è radice* con molteplicità r dell'equazione caratteristica (1), allora si cerca una soluzione particolare di (EC) della forma
$$y_p(t) = t^r(A_0 + A_1 t + \cdots + A_m t^m)e^{bt}\sin(ct) + t^r(B_0 + B_1 t + \cdots + B_m t^m)e^{bt}\cos(ct).$$

Osservazione. Se $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, allora una soluzione particolare di (EC) è data da $y_p(t) = z_1(t) + z_2(t)$, dove $z_j(t)$ è soluzione di $z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + a_1 z' + a_0 z = f_j(t)$, $j = 1, 2$.

Esempio 1. Una soluzione particolare di
$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^t \tag{2}$$
è dato da
$$y_p(t) = \frac{1}{6}t^3 e^t.$$
Infatti $\lambda = 1$ è radice di molteplicità 3 della equazione caratteristica associata, e dunque la soluzione particolare può essere cercata della forma $y_p(t) = At^3e^t$; basta poi calcolare y_p', y_p'', y_p''' e sostituirli nella equazione (2) per determinare il valore di A. L'integrale generale di (2) è dunque dato da
$$y(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + c_3 t^2 e^t + \frac{1}{6}t^3 e^t.$$

Esempio 2. Una soluzione particolare di

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \sin t \tag{3}$$

è dato da

$$y_p(t) = \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{4}\cos t.$$

Infatti, poiché $\lambda = i$ non è radice dell'equazione caratteristica, una soluzione particolare può essere cercata della forma $y_p(t) = A\sin t + B\cos t$. Calcolandone le derivate successive fino al terzo ordine e sostituendo in (3) si ottiene

$$(2A + 2B)\cos t + (2A - 2B)\sin t = \sin t$$

da cui

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ 2A - 2B = 1 \end{cases} \Longrightarrow A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4}.$$

L'integrale generale di (3) è dunque dato da

$$y(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{4}\cos t.$$

Esempio 2. Una soluzione particolare di

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^t + \sin t \tag{4}$$

è dato da

$$y_p(t) = \frac{1}{6}t^3e^t + \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{4}\cos t.$$

Infatti, per l'Osservazione fatta, una soluzione particolare si ottiene come somma delle soluzioni particolari dei due precedenti esempi.
L'integrale generale di (4) è dunque dato da

$$y(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + \frac{1}{6}t^3e^t + \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{4}\cos t.$$