

APPLICAZIONI di MATEMATICA

1 Funzioni complesse - Generalità

Posto $s = x + jy$ e $z = u + jv$ (dove x, y, u, v sono numeri reali e j indica l'unità immaginaria), sia $z = f(s)$ una funzione complessa. Tale funzione può essere interpretata come la trasformazione piana $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

dove $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ prendono nome, rispettivamente, di *parte reale di f* e *parte immaginaria di f* . Si ha quindi: $f(s) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$. Ad esempio la parte reale e la parte immaginaria della funzione

$$f(s) = \frac{1}{s}$$

sono date rispettivamente da

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

La funzione $f(s) = 1/s$ prende nome di “*inversione per raggi reciproci*” e gode della seguente proprietà: f trasforma circonferenze di centro l'origine in circonferenze di centro l'origine e ne inverte il senso di percorrenza. Inoltre f trasforma l'interno di tali circonferenze nell'esterno e viceversa.

Per esercizio si calcoli la parte reale e la parte immaginaria delle seguenti

funzioni

$$f_1(s) = 7js + s^2$$

$$f_2(s) = s + |s|^2$$

$$f_3(s) = \frac{\bar{s}}{s-4}$$

$$f_4(s) = \frac{3}{s-|s|}.$$

2 Successioni e serie

Essendo $\mathbb{C}$ uno spazio metrico, la nozione di convergenza di successioni è analoga a quella vista in $\mathbb{R}$: è sufficiente sostituire il “valore assoluto” con il “modulo”. Precisamente diremo che

$$\lim_n s_n = s_0 \tag{1}$$

o, equivalentemente,

$$s_n \rightarrow s_0$$

con $s_n, s_0 \in \mathbb{C}$ se: $\forall \epsilon > 0$ esiste n_0 tale che $|s_n - s_0| < \epsilon \forall n \geq n_0$. È facile mostrare che (1) è equivalente all'esistenza dei due limiti

$$\lim_n \operatorname{Re} s_n = \operatorname{Re} s_0, \quad \lim_n \operatorname{Im} s_n = \operatorname{Im} s_0.$$

Poiché $\mathbb{C}$ è completo, ogni successione convergente in $\mathbb{C}$ è di Cauchy, ossia verifica

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 : |s_n - s_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

e viceversa.

Analogamente al caso reale, diremo poi che la serie di numeri complessi

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i$$

converge, se converge la successione $\{S_n\}$ delle somme parziali, dove

$$S_n = \sum_{i=0}^n s_i.$$

In particolare vale il seguente risultato (convergenza assoluta) “*Se la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} |s_k|$ è convergente (in $\mathbb{R}$), allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} s_k$ è convergente in $\mathbb{C}$* ”.

3 Esponenziale in $\mathbb{C}$

Si chiama *esponenziale complesso* la funzione

$$e^s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots + \frac{s^i}{i!} + \dots$$

Tale definizione è l'estensione al campo complesso dell'esponenziale reale, è definita per ogni numero complesso s e gode delle seguenti proprietà:

1. $e^{s+z} = e^s e^z$, $\forall s, z \in \mathbb{C}$. In particolare:
2. $e^{x+jy} = e^x e^{jy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
3. $e^{jy} = \cos y + j \sin y$, $e^{-jy} = \cos y - j \sin y$. Ricordando gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni (reali) seno e coseno infatti si ha:

$$\begin{aligned} e^{jy} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jy)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^{2k} y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^{2k+1} y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos y + j \sin y. \end{aligned}$$

Analogamente si prova che $e^{-jy} = \cos y - j \sin y$. Mediante somma e sottrazione, si ottengono poi le ben note *formule di Eulero* ($y \in \mathbb{R}$)

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j};$$

4. indicando rispettivamente con ρ e θ il modulo e l'argomento di un numero complesso $s \neq 0$ si ha che tale numero può essere rappresentato (oltreché in forma algebrica e trigonometrica) mediante la *forma esponenziale*: $s = \rho e^{j\theta}$
5. $|e^s| = e^{\text{Re } s}$, $\text{Arg}(e^s) = \text{Im}(s)$,
 $\text{Re}(e^s) = e^{\text{Re } s} \cos(\text{Im } s)$, $\text{Im}(e^s) = e^{\text{Re } s} \sin(\text{Im } s)$
6. $e^s \neq 0$ per ogni $s \in \mathbb{C}$
7. $e^s = e^{s+2k\pi j}$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e., e^s è una funzione periodica con periodo (complesso) $T = 2\pi j$.

4 Limiti e Continuità

Poiché $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico, la definizione di limite in $\mathbb{C}$ è simile a quella data in $\mathbb{R}$: è sufficiente interpretare il $|\dots|$ come modulo. Precisamente, data una funzione complessa $z = f(s)$ diremo che

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = L, \quad (L \in \mathbb{C})$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|s - s_0| < \delta$ e $s \neq s_0$ si ha $|f(s) - L| < \varepsilon$. È facile provare che

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = L, \quad (L \in \mathbb{C})$$

se e solo se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \operatorname{Re} f(s) = \operatorname{Re} L \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow s_0} \operatorname{Im} f(s) = \operatorname{Im} L.$$

La funzione complessa $z = f(s)$ si dice *continua in s_0* se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = f(s_0).$$

Una funzione f è continua in s_0 se e solo se sono continue in (x_0, y_0) [dove $s_0 = x_0 + jy_0$] la parte reale $u(x, y)$ e la parte immaginaria $v(x, y)$. Somma, differenza, prodotto e quoziente di due funzioni continue sono funzioni continue (nel caso del quoziente sono **esclusi** i punti in cui il denominatore si annulla).

Poiché $\mathbb{C}$ è non ordinato, non è possibile estendere al piano complesso il concetto di funzione monotona e le relative proprietà viste nell'ambito dell'analisi reale.

5 Il concetto di infinito in $\mathbb{C}$

Nel seguito considereremo l'insieme $\mathbb{C}$ ampliato con l'aggiunta di $\{\infty\}$ (*punto all'infinito*) e chiameremo *intorno di ∞* di raggio R , l'esterno della circonferenza di centro l'origine e raggio R . Tale definizione è giustificata dal fatto che l'insieme dei numeri complessi, ampliato con $\{\infty\}$, può essere messo in corrispondenza biunivoca con i punti della superficie di una sfera mediante

la nota “proiezione stereografica”. Il punto $\{\infty\}$ corrisponde, sulla superficie sferica, al polo, e l'intorno di ∞ ad una calotta polare.

Diremo che una successione $\{s_n\}$ converge a ∞ se

$$\lim_n |s_n| = +\infty.$$

Anche tale definizione può essere giustificata rappresentando $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sulla superficie di una sfera mediante la proiezione stereografica. Analogamente, una funzione $f(s)$ definita in un intorno di un punto s_0 , converge in tal punto a ∞ se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} |f(s)| = +\infty,$$

ossia $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ tale che $|f(s)| > M, \forall s : |s - s_0| < \delta$. Se la funzione f è definita in un intorno di ∞ , se ne può calcolare il limite. Diremo che

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = L$$

se $\forall \epsilon > 0, \exists R > 0$ tale che $|f(s) - L| < \epsilon, \forall s : |s| > R$. Analogamente

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \infty$$

se $\forall M > 0, \exists R > 0$ tale che $|f(s)| > M, \forall s : |s| > R$.

6 Derivabilità e analiticità

6.1 Definizioni

DEF. 1 - Una funzione f , definita in un intorno di un punto s_0 , si dice **derivabile** in s_0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0} \quad (2)$$

e tale limite si indica con il simbolo $f'(s_0)$.

Chiaramente, una funzione derivabile in un punto s_0 è anche continua in s_0 .

Esempi: per le funzioni

$$f(s) = 1, \quad g(s) = s, \quad h(s) = s^2$$

si ha rispettivamente

$$f'(s) = 0, \quad g'(s) = 1, \quad h'(s) = 2s.$$

In generale, è possibile provare che, se $n \in \mathbb{N}$, allora

$$f(s) = s^n \implies f'(s) = ns^{n-1}.$$

Provare per esercizio che le funzioni $f(s) = \bar{s}$, $g(s) = |s|$ non sono derivabili in $s_0 = 0$. Come vedremo nel prossimo paragrafo, in effetti tali funzioni non sono derivabili **in nessun punto** di $\mathbb{C}$.

DEF. 2 - Sia Ω un insieme aperto del piano complesso. Una funzione f si dice **analitica** in Ω [e si scrive $f \in C^1(\Omega)$] se f è derivabile in tutto l'insieme Ω ed ha derivata continua.

6.2 Teorema di Cauchy-Riemann

Sia f una funzione analitica in un aperto Ω del piano complesso, e sia $s_0 = x_0 + jy_0 \in \Omega$ un punto fissato. Poniamo $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Essendo f derivabile in s_0 , il limite del rapporto incrementale (2) è lo stesso comunque s tenda ad s_0 .

Consideriamo un incremento solo reale: $s = s_0 + h$, $h \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$\begin{aligned} f'(s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + h) - f(s_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) + j[v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)]}{h} \\ &= u_x(x_0, y_0) + jv_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

In maniera analoga possiamo considerare un incremento immaginario puro: $s = s_0 + jh$, $h \in \mathbb{R}$, e risulta:

$$\begin{aligned} f'(s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + jh) - f(s_0)}{jh} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0) + j[v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)]}{jh} \\ &= [u_y(x_0, y_0) + jv_y(x_0, y_0)]/j = v_y(x_0, y_0) - ju_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Tali due espressioni devono essere uguali per l'unicità del limite, i.e., deve risultare $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$, $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$. Questo in ogni punto s_0 interno alla regione di analiticità.

Vale più precisamente il seguente importante risultato:

Teorema di Cauchy-Riemann. *Sia Ω un insieme **aperto** del piano complesso. Una funzione f è analitica in Ω **se e solo se** le funzioni $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ sono derivabili parzialmente rispetto a x e y [dove, al solito, $s = x + jy$] con derivate continue e verificano in tutto Ω le relazioni*

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \tag{3}$$

$$u_y(x, y) = -v_x(x, y).$$

Inoltre si ha

$$f'(s) = u_x(x, y) + jv_x(x, y). \tag{4}$$

Le formule (3) prendono nome di *formule di Cauchy-Riemann*.

La formula (4) fornisce l'espressione della derivata di una funzione analitica. Da essa, tenendo conto di (3), è possibile ottenere altre equivalenti espressioni per la derivata. Ad esempio si ha

$$f'(s) = v_y(x, y) - ju_y(x, y).$$

Esercizi - Importanti

- i) provare che la funzione $f(s) = \bar{s}$ non è analitica in nessun aperto di $\mathbb{C}$;
- ii) provare che la funzione $f(s) = 1/s$ non è analitica in tutto $\mathbb{C}$, ma lo è in $\mathbb{C} - \{0\}$;
- iii) provare che $g(s) = s^2 + js$ è analitica in $\mathbb{C}$ e si ha $g'(s) = 2s + j$;
- iv) provare che $h(s) = e^s$ è analitica in $\mathbb{C}$ e si ha $h'(s) = e^s$;
- v) provare che il Teorema di Rolle non vale in $\mathbb{C}$ (*suggerimento: pensare alla funzione esponenziale*);
- vi) sia f analitica in $\mathbb{C}$ e sia $\operatorname{Im} f \equiv 0$. Provare che f è costante. Analogo se $\operatorname{Re} f \equiv 0$. Da ciò segue in particolare che $f(s) = |s|$ non è analitica in nessun aperto di $\mathbb{C}$.

7 Analiticità e funzioni armoniche

Una funzione $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h = h(x, y)$, si dice armonica in un aperto Ω se in tale aperto h soddisfa l'equazione (di Laplace)

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0. \quad (5)$$

Utilizzando il fatto (che sarà visto in seguito) che una funzione complessa f è analitica in un insieme aperto Ω se e solo se $f \in C^\infty(\Omega)$, si ha allora il seguente:

Teorema - Parte (i): *Sia f analitica in un intorno I di un punto s_0 . Allora le funzioni*

$$u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f$$

sono funzioni armoniche in tale intorno, ossia in tale intorno verificano le equazioni

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Parte (ii) : *Viceversa sia $u = u(x, y)$ [$v = v(x, y)$] una funzione armonica in un intorno I di (x_0, y_0) . Allora esiste una funzione analitica f , individuata a meno di una costante immaginaria pura [reale], tale che $\operatorname{Re} f = u$ [$\operatorname{Im} f = v$].*

La dimostrazione della Parte (i) è un'immediata conseguenza del Teorema di Cauchy-Riemann e della proprietà, sopra anticipata, che f è analitica in un insieme aperto Ω se e solo se $f \in C^\infty(\Omega)$. Per il Teorema di Cauchy-Riemann, le derivate parziali u_x, u_y, v_x, v_y sono a loro volta derivabili. Allora derivando rispetto ad x la prima delle formule (3) e rispetto ad y la seconda delle formule (3) e sommando membro a membro si ottiene il primo asserto. Il secondo asserto in (i) segue in modo analogo, derivando rispetto ad y la prima delle formule (3) e rispetto ad x la seconda. La dimostrazione della Parte (ii) è “costruttiva” e sarà vista nel paragrafo seguente.

Corollario *Una funzione $u = u(x, y)$, definita in un intorno I di un punto (x_0, y_0) è parte reale di una funzione analitica in I se e solo se u è armonica in tale intorno, ossia soddisfa l'equazione (5) in I . Analogamente una funzione $v = v(x, y)$, definita in I , è parte immaginaria di una funzione*

analitica in I se e solo se v è armonica in I , ossia soddisfa l'equazione (5) in I .

Esempi. La funzione $u(x, y) = 2xy + y$ è parte reale di una funzione analitica. La funzione $v(x, y) = x^2 + 4xy$ non è parte immaginaria di una funzione analitica. Analogamente, la funzione $u(x, y) = 2x - 7y^2$ non è parte reale di una funzione analitica.

8 Ricostruzione di una funzione analitica f , assegnata la parte reale $u = \operatorname{Re} f$ oppure la parte immaginaria $v = \operatorname{Im} f$.

Utilizzando i risultati precedenti e le formule di Cauchy-Riemann, è possibile determinare tutte le funzioni analitiche aventi una parte reale (o immaginaria) assegnata e armonica.

Procediamo con un esempio. La funzione $u(x, y) = 6xy - x - 2$, come è immediato verificare, è armonica. Troviamo dunque le funzioni f tali che $\operatorname{Re} f = u$.

Si ha

$$u_x(x, y) = 6y - 1, \quad u_y(x, y) = 6x$$

Tenendo conto delle formule di Cauchy-Riemann si ottiene

$$\begin{aligned} v_y(x, y) &= 6y - 1 \\ v_x(x, y) &= -6x \end{aligned}$$

Integrando la prima equazione rispetto a y e la seconda rispetto a x si ha rispettivamente

$$\begin{aligned} v(x, y) &= 3y^2 - y + c(x) \\ v(x, y) &= -3x^2 + d(y) \end{aligned}$$

dove $c = c(x)$ è una funzione della **sola** x e $d = d(y)$ è una funzione della **sola** y . Allora

$$3y^2 - y + c(x) = -3x^2 + d(y)$$

ossia

$$-3y^2 + y + d(y) = 3x^2 + c(x)$$

Poichè il primo membro dipende solo da y e il secondo soltanto da x , necessariamente entrambi devono essere costanti, ossia esiste una costante reale k tale che

$$-3y^2 + y + d(y) = 3x^2 + c(x) = k.$$

Ne segue $c(x) = -3x^2 + k$ (e $d(y) = 3y^2 - y + k$) e quindi $v(x, y) = 3y^2 - y - 3x^2 + k$. In definitiva si ottiene

$$\begin{aligned} f(s) = f(x + jy) &= u(x, y) + jv(x, y) = \\ &= [6xy - x - 2] + j[3y^2 - y - 3x^2 + k] \end{aligned} \tag{6}$$

Per determinare l'espressione di f in funzione della variabile s si può usare il seguente:

Teorema di Weierstrass (dell'unicità dell'estensione analitica)

*Sia $\hat{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Allora esiste **al più una** estensione di $\hat{h}$ al piano complesso che risulti analitica, i.e. esiste al più una funzione $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitica e tale che $h(x) = \hat{h}(x) \forall x \in \mathbb{R}$.*

Il teorema di Weierstrass è un risultato di “unicità” e sinteticamente è chiamato “Teorema dell'unicità dell'estensione analitica”.

Il (semplice) procedimento è il seguente. Da (6) si ha

$$\hat{h}(x) = f(x + j0) = -x - 2 - 3x^2j + kj. \tag{7}$$

Si consideri poi l'estensione a $\mathbb{C}$ della funzione $\hat{h}$, ossia si consideri la funzione h ottenuta da (7) sostituendo x con s :

$$h(s) = -s - 2 - 3s^2j + kj. \tag{8}$$

Le funzioni (6) e (8) sono due estensioni **analitiche** della stessa funzione $\hat{h}$. Allora, per il Teorema di unicità di Weierstrass, tali funzioni devono necessariamente coincidere, e quindi

$$f(s) = -s - 2 - 3s^2j + kj.$$

- Determinare le funzioni analitiche tali che $u(x, y) = 3(x^2 - y^2)$ [Risposta: $f(s) = 3s^2 + jk$].
- Determinare la funzione analitica f tale che $\operatorname{Re} f = x + 10xy$, $f(0) = 0$.
[Risposta: $f(s) = -5js^2 + s$].

Prima di procedere con lo studio delle proprietà delle funzioni analitiche in $\mathbb{C}$, vediamo come si possono definire le radici, il logaritmo e le funzioni trigonometriche complesse.

9 Radici in campo complesso e risoluzione di equazioni algebriche.

Determinare le radici n -esime di un dato numero complesso $s_0 \neq 0$ significa risolvere l'equazione $z^n = s_0$. Utilizzando la forma trigonometrica $s_0 = \rho_0(\cos \theta_0 + j \sin \theta_0)$, $z = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$ (ρ_0, θ_0 dati del problema, ρ, θ incognite), mediante l'utilizzo delle formule di De Moivre si ottiene

$$\rho^n = \rho_0, \quad n\theta = \theta_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Infatti due numeri complessi coincidono se e solo se hanno uguale modulo e argomento che differisce per multipli di 2π . Essendo ρ_0 reale positivo, la prima equazione ha come unica soluzione $\rho = \sqrt[n]{\rho_0}$ (radice reale). Dalla seconda: $\theta = \theta_0/n + 2k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$; si osserva che soltanto per $k = 0, 1, \dots, n-1$ risulta $\theta \in [0, 2\pi)$. Pertanto le radici n -esime di s_0 sono date da:

$$\sqrt[n]{s_0} = \sqrt[n]{\rho_0} \left[\cos \left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right) + j \sin \left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

dove $\rho_0 = |s_0|$, $\theta_0 = \text{Arg}(s_0)$.

Pertanto:

- **Le radici distinte sono esattamente n .**
- **Tali radici hanno tutte lo stesso modulo** e quindi si trovano su una medesima circonferenza, di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho_0}$.
- **Tali radici sono i vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto in tale circonferenza.** Quindi tali radici differiscono tra loro per una rotazione di un multiplo di $2\pi/n$.

La radice n -esima in $\mathbb{C}$ quindi *non* è una funzione, ma una applicazione a più valori. Ad esempio la radice quadrata in $\mathbb{C}$ restituisce due valori (opposti) ($\sqrt{-4} = \pm 2j$).

10 Equazioni esponenziali e logaritmo in $\mathbb{C}$

Sia s_0 un numero complesso, $s_0 \neq 0$. Scrivendo tale numero in forma trigonometrica si ottiene $s_0 = \rho_0(\cos \theta_0 + j \sin \theta_0)$, con $\rho_0 \neq 0$. Ciò posto, si consideri l'equazione

$$e^z = s_0.$$

Ponendo $z = x + jy$ tale equazione allora diviene:

$$e^x(\cos y + j \sin y) = \rho_0(\cos \theta_0 + j \sin \theta_0),$$

da cui

$$x = \log \rho_0, \quad y = \theta_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Otteniamo quindi infinite soluzioni date da:

$$z = x + jy = \log |s_0| + j(\text{Arg}(s_0) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} . \quad (9)$$

Tali soluzioni hanno tutte la stessa parte reale (il logaritmo in $\mathbb{R}$ del modulo di s_0) e differiscono nella parte immaginaria per multipli di 2π . A tale espressione si dà il nome di *logaritmo in campo complesso*.

Sottolineiamo il fatto che, come nel caso della radice, questa non è una funzione “tradizionale” in $\mathbb{C}$ perchè assume più di un valore (precisamente assume infiniti valori).

Esempi:

1) - Risolvere l'equazione

$$e^s = 1.$$

Da (9) si ha

$$s = \log |1| + j(\text{Arg}(1) + 2k\pi) = 2k\pi j, \quad k \in \mathbb{Z} .$$

2) - Risolvere l'equazione

$$e^s = 4j.$$

Da (9) si ha

$$s = \log |4j| + j(\text{Arg}(4j) + 2k\pi) = \log 4 + j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z} .$$

3) - Risolvere l'equazione

$$e^{1/(s-1)} = -1.$$

Ponendo

$$z = \frac{1}{s-1} \quad (10)$$

si ottiene l'equazione

$$e^z = -1$$

Da (9) si ha poi

$$z = \log |-1| + j(\text{Arg}(-1) + 2k\pi) = j(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

e quindi, in virtù di (10),

$$\frac{1}{s-1} = j(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

ossia

$$s = 1 + \frac{1}{j(\pi + 2k\pi)} = 1 - \frac{j}{(1 + 2k)\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

11 Funzioni trigonometriche in $\mathbb{C}$

Si definiscono le funzioni trigonometriche seno e coseno in $\mathbb{C}$ come estensione al campo complesso delle formule di Eulero nel modo seguente:

$$\sin s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{js} - e^{-js}}{2j}, \quad \cos s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{js} + e^{-js}}{2}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Le principali proprietà di tali funzioni sono le seguenti.

1. Le funzioni seno e coseno in $\mathbb{C}$ sono le estensioni al campo complesso delle corrispondenti funzioni reali;
2. Le *formule trigonometriche* note in campo reale e che **non** coinvolgono disuguaglianze, continuano a valere in $\mathbb{C}$. Ad esempio sono valide (e la verifica è immediata) l'identità fondamentale

$$\sin^2 s + \cos^2 s = 1,$$

le formule di somma, di sottrazione, di duplicazione, ecc... .

3. Le funzioni seno e coseno sono *periodiche* di periodo 2π .
4. La funzione seno è dispari, mentre la funzione coseno è pari:

$$\sin(-s) = -\sin s, \quad \cos(-s) = \cos s.$$

5. Valgono le relazioni

$$\begin{aligned}\sin s &= \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y \\ \cos s &= \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y,\end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\sin s) &= \sin x \cosh y, & \operatorname{Im}(\sin s) &= \cos x \sinh y \\ \operatorname{Re}(\cos s) &= \cos x \cosh y, & \operatorname{Im}(\cos s) &= -\sin x \sinh y.\end{aligned}\tag{11}$$

6. Utilizzando (11) si provi per esercizio che valgono le relazioni

$$\overline{\sin s} = \sin \bar{s}, \quad \overline{\cos s} = \cos \bar{s}.$$

7. Utilizzando (11) si provi che le funzioni $\sin s$, $\cos s$ sono analitiche in $\mathbb{C}$ e si ha

$$\frac{d}{ds} \sin s = \cos s, \quad \frac{d}{ds} \cos s = -\sin s.$$

8. Le funzioni seno e coseno *assumono tutti i valori complessi*. Dunque l'equazione $\sin s = \alpha$ ammette infinite soluzioni qualunque sia $\alpha \in \mathbb{C}$, e analogamente $\cos s = \alpha$. Di conseguenza **le funzioni seno e coseno NON sono limitate in $\mathbb{C}$** .

9. Se $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leq 1$, l'equazione $\sin s = a$ ha come soluzioni *tutte e sole* le soluzioni (reali) di $\sin x = a$ in $\mathbb{R}$; analogo per il coseno. Quindi, in particolare scegliendo $a = 0$ si ha che **gli zeri delle funzioni seno e coseno in $\mathbb{C}$ coincidono con gli zeri delle corrispondenti funzioni reali**.

12 Curva regolare in $\mathbb{C}$

Sia $[a, b]$ un intervallo **limitato e chiuso** della retta reale. Una *curva regolare* è una funzione $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t)$$

dove le funzioni reali $x = x(t), y = y(t)$ sono funzioni derivabili con derivata continua nell'intervallo aperto (a, b) [i.e. $x, y \in C^1(a, b)$] e le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ non si annullano contemporaneamente in (a, b) .

Tale concetto è del tutto analogo a quello visto nell'ambito dei corsi di Analisi Matematica, con la sola differenza che ora esso è formulato usando le notazioni complesse.

Se le due funzioni x, y sono di classe C^1 in tutto (a, b) eccetto un numero finito di punti e/o le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ si annullano contemporaneamente in un numero finito di punti, allora γ si dice *generalmente regolare*.

Geometricamente una curva regolare è rappresentata da una “linea” (detta *sostegno della curva*) avente tangente in ogni punto, salvo, al più, gli estremi; una curva generalmente regolare è invece rappresentata da una “linea” che ammette tangente in ogni punto eccetto un numero finito di punti.

Esempi. (i) La curva

$$\gamma(t) = \cos t + j \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro l'origine, raggio 1 e percorsa in senso antiorario (il senso delle “ t crescenti”). Ricordando la definizione di esponenziale complesso, tale curva si può esprimere anche nella forma compatta

$$\gamma(t) = e^{jt}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(ii) La curva

$$\gamma(t) = 6 + 3e^{jt}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro 6, raggio 3 e percorsa in senso antiorario.

(iii) La curva

$$\gamma(t) = 1 + j + 2e^{jt}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro $1 + j$, raggio 2 e percorsa in senso antiorario.

(iv) La curva

$$\gamma(t) = 2e^{jt}, \quad t \in [0, \pi]$$

rappresenta una semicirconferenza di centro l'origine, raggio 2, giacente nel 1° e 2° quadrante e percorsa in senso antiorario.

(v) La curva

$$\gamma(t) = t(1 + mj), \quad t \in [a, b]$$

rappresenta un segmento sulla retta passante per l'origine e con coefficiente angolare m . Tale segmento va dal punto $s_1 = a + jma$ al punto $s_2 = b + jmb$.

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare; si chiama *lunghezza di* γ il numero reale

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |x'(t) + jy'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Una curva γ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva γ si dice *semplice* se presi $t_1, t_2 \in (a, b)$ con $t_1 \neq t_2$ risulta $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

Ogni curva γ (generalmente) regolare, semplice e chiusa, divide il piano complesso in due aperti connessi e disgiunti; l'aperto limitato si dice *interno* di γ , mentre l'aperto illimitato si dice *esterno* di γ . Date due curve γ_1, γ_2 (generalmente) regolari, semplici e chiuse, diremo che γ_2 è *interna* a γ_1 se γ_2 è contenuta nell'interno di γ_1 . Dunque, in particolare, γ_1 e γ_2 non hanno punti a comune.

13 Definizione di Integrale in $\mathbb{C}$

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare e sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua sulla curva. Si chiama *integrale di* f *esteso a* γ il numero complesso

$$\int_\gamma f(s) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Esempi: Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{\gamma_1} |s| ds \text{ dove } \gamma_1(t) = 4e^{jt}, t \in [0, \pi]; \\I_2 &= \int_{\gamma_2} |s| ds \text{ dove } \gamma_2(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi]; \\I_3 &= \int_{\gamma_3} \bar{s} ds \text{ dove } \gamma_3(t) = e^{jt}, t \in [0, \pi/2]; \\I_4 &= \int_{\gamma_4} s ds \text{ dove } \gamma_4(t) = 2e^{jt}, t \in [0, \pi/2].\end{aligned}$$

Si ha $I_1 = -32, I_2 = 0, I_3 = \pi j/2, I_4 = -4$.

★ **Esercizio.** Si ha

$$\int_C \frac{1}{s - s_0} ds = 2\pi j,$$

dove $C(t) = s_0 + re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$, i.e. C è una circonferenza di centro s_0 , raggio r e percorsa (**una sola volta**) in senso antiorario (positivo).

14 Proprietà dell'integrale in $\mathbb{C}$

1. **Linearità** (c_1, c_2 costanti complesse):

$$\int_{\gamma} [c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)] ds = c_1 \int_{\gamma} f_1(s) ds + c_2 \int_{\gamma} f_2(s) ds$$

2. **Ordine:**

$$\int_{\gamma} f(s) ds = - \int_{-\gamma} f(s) ds.$$

3. **Additività:**

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(s) ds = \int_{\gamma_1} f(s) ds + \int_{\gamma_2} f(s) ds$$

4. **Modulo dell'integrale:** vale la maggiorazione :

$$\left| \int_{\gamma} f(s) ds \right| \leq L_{\gamma} \max_{s \in \gamma} |f(s)|$$

dove L_{γ} indica la lunghezza della curva γ .

15 Teoremi di Cauchy per l'integrale

Teorema 1 (di Cauchy) *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica nell'aperto connesso A . Per ogni curva (generalmente) regolare, semplice e chiusa γ contenuta in A assieme al proprio interno D , si ha*

$$\int_{\gamma} f(s) ds = 0.$$

Tale Teorema esprime il fatto che, in una regione in cui f è analitica, **l'integrale è indipendente dal cammino**.

Si osservi che se la funzione integranda non è analitica in TUTTA la regione limitata dalla curva γ , allora l'integrale può non essere nullo, come illustra l'esempio visto $[C(t) = s_0 + re^{jt}, t \in [0, 2\pi], r > 0]$

$$\int_C \frac{1}{s - s_0} ds = 2\pi j. \quad (12)$$

Teorema 2 (di Cauchy) *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica nell'aperto connesso A . Siano γ_1 e γ_2 due curve (generalmente) regolari, semplici, chiuse, contenute in A , percorse nello stesso senso, con γ_2 interna a γ_1 [vedi figura 1]. Siano D_1 e D_2 , rispettivamente, gli interni di γ_1 e γ_2 e supponiamo che $D_1 - D_2 \subset A$. Allora*

$$\int_{\gamma_1} f(s) ds = \int_{\gamma_2} f(s) ds.$$

Tale risultato esprime il fatto che l'integrale lungo una curva regolare (o generalmente regolare), semplice e chiusa non cambia se si “deforma con continuità la curva” purchè la funzione considerata sia analitica in tutta la regione compresa tra la curva originaria e la curva “deformata”.

Ricordando l'integrale (12), indicando con γ una **qualunque** curva regolare (o generalmente regolare), semplice e chiusa, dai Teoremi 1 e 2 si ha allora

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{1}{s - s_0} ds = \begin{cases} 1 & \text{se } s_0 \text{ è interno a } \gamma \\ 0 & \text{se } s_0 \text{ è esterno a } \gamma \end{cases}. \quad (13)$$

Teorema 3 (di Cauchy) *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica nell'aperto connesso A . Siano γ_1 , γ_2 e γ_3 tre curve (generalmente) regolari, semplici,*

chiuse, contenute in A , percorse nello stesso senso, con γ_2 e γ_3 interne a γ_1 e tra loro disgiunte. [vedi figura 2]. Siano D_1 , D_2 e D_3 , rispettivamente, gli interni di γ_1 , γ_2 e γ_3 , e supponiamo che $D_1 - D_2 - D_3 \subset A$. Allora

$$\int_{\gamma_1} f(s)ds = \int_{\gamma_2} f(s)ds + \int_{\gamma_3} f(s)ds.$$

Il precedente risultato si estende poi immediatamente al caso in cui f sia analitica all'interno di γ_1 eccetto un numero finito di chiusi disgiunti.

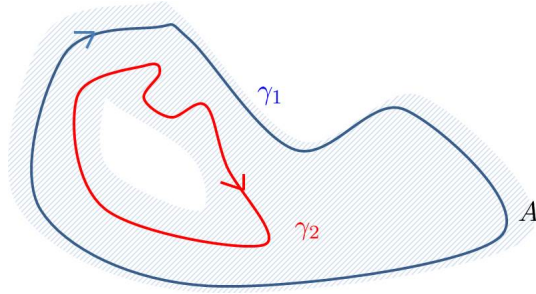


Figure 1: Le curve γ_1 e γ_2 nel Secondo Teorema di Cauchy. La funzione f è analitica in un aperto connesso A contenente $D_1 - D_2$ (D_i =interno di γ_i , $i = 1, 2$).

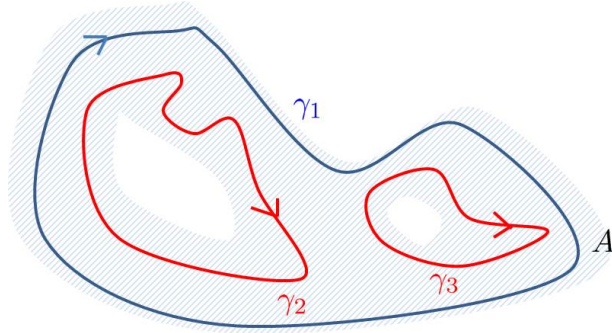


Figure 2: Le curve γ_1 , γ_2 e γ_3 nel Terzo Teorema di Cauchy. La funzione f è analitica in un aperto connesso A contenente $D_1 - D_2 - D_3$ (D_i =interno di γ_i , $i = 1, 2, 3$).

Esercizio. Calcolare:

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{4}{(s-1)(s-2)(s-4)} ds, \quad \gamma(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi].$$

Idea della risoluzione: La funzione integranda è analitica in $\mathbb{C}$ tranne che nei punti $s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 4$. Soltanto s_1 e s_2 sono interni a γ , che è una circonferenza di centro l'origine e raggio 3. Allora, per il 3° teorema di Cauchy:

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_1} \frac{4}{(s-1)(s-2)(s-4)} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_2} \frac{4}{(s-1)(s-2)(s-4)} ds,$$

dove γ_1 è una qualunque curva chiusa e semplice, contenuta all'interno di γ e contenente al suo interno il punto s_1 ma non il punto s_2 , percorsa in senso antiorario, e γ_2 è una qualunque curva chiusa e semplice, contenuta all'interno di γ e contenente al suo interno il punto s_2 ma non il punto s_1 , percorsa in senso antiorario. Per poter utilizzare il risultato dell'esercizio ★, scriviamo la funzione integranda in fratti semplici.

$$\frac{4}{(s-1)(s-2)(s-4)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-2)} + \frac{C}{(s-4)}.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -6A - 5B - 3C = 0 \\ 8A + 4B + 2C = 4 \end{cases},$$

si ottiene $A = 4/3, B = -2, C = 2/3$. Per la linearità dell'integrale risulta: $I = I_1 + I_2$, dove

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_1} \frac{4}{3(s-1)} ds - \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_1} \frac{2}{s-2} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_1} \frac{2}{3(s-4)} ds = \frac{4}{3},$$

e

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_2} \frac{4}{3(s-1)} ds - \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_2} \frac{2}{s-2} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_2} \frac{2}{3(s-4)} ds = -2.$$

Infatti, poiché γ_1 contiene al suo interno solo il punto 1, mentre 2 e 4 sono esterni, si ha:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_1} \frac{1}{s-1} ds = 1, \quad \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_1} \frac{1}{s-2} ds = 0, \quad \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_1} \frac{1}{s-4} ds = 0.$$

Analogamente per gli integrali su γ_2 , tenendo conto che tale curva contiene al suo interno solo il punto 2 mentre 1 e 4 sono esterni.

16 Singolarità

Sia f una funzione complessa, e sia $s_0 \in \mathbb{C}$ un punto fissato.

DEF. 3 - s_0 si dice *punto di regolarità* per f se esiste un intorno I di s_0 tale che f è analitica in tutto I (s_0 compreso). In caso contrario s_0 si dice *punto di singolarità* per f .

DEF. 4 - Sia s_0 un punto singolare per f . Allora s_0 si dice *singolarità isolata* (o punto singolare isolato) se esiste un intorno I di s_0 tale che f è analitica in $I - \{s_0\}$ (i.e. f è analitica in tutto I eccetto s_0). Altrimenti il punto s_0 si dice *singolarità non isolata* (o *punto di accumulazione di singolarità*).

Esempi :

$$f_1(s) = \frac{s^2 + 1}{(s - 2)(s - 4)^3} \implies s = 2, s = 4 \text{ sono singolarità isolate.}$$

$$f_2(s) = \bar{s} \implies \text{ogni punto } s \in \mathbb{C} \text{ è una singolarità non isolata.}$$

$$f_3(s) = \frac{1 - \cos s}{s^2} \implies s = 0 \text{ è una singolarità isolata.}$$

$$f_4(s) = \sin(1/s) \implies s = 0 \text{ è una singolarità isolata.}$$

$$f_5(s) = \frac{1}{\sin(1/s)} \implies s = 0 \text{ è una singolarità non isolata, } s_k = 1/k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0, \text{ sono singolarità isolate. Infatti } \lim_k s_k = 0.$$

Si osservi che una singolarità non isolata può aversi solo nel caso che la funzione abbia *infinite* singolarità.

DEF. 5 - Sia s_0 una singolarità *isolata* per f . Allora s_0 si dice

♦ *singolarità eliminabile* se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) \text{ esiste finito:}$$

♦ *singolarità polare* se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = \infty;$$

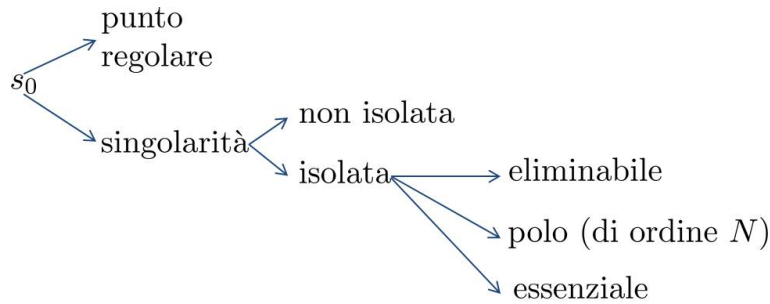
♦ *singolarità essenziale* se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) \text{ non esiste.}$$

♦ Nel caso in cui s_0 sia una singolarità polare, allora s_0 si dice *polo di ordine* N , con $N \in \mathbb{N}$, se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0)^N f(s) \text{ è finito e diverso da } 0$$

Schematicamente:



In riferimento agli esempi di prima si ha: la funzione f_1 ha in $s = 2$ un polo semplice e in $s = 4$ un polo triplo. La funzione f_3 ha in $s = 0$ una sing. eliminabile. La funzione f_4 ha in $s = 0$ una singolarità essenziale. La funzione f_5 ha in $s_k = 1/(k\pi)$ ($k \neq 0$) singolarità polari semplici.

17 Serie di Laurent

Teorema di Laurent Sia f una funzione analitica in un intorno I di s_0 , eccetto, al più, s_0 . Ciò posto, per $s \in I - \{s_0\}$ si ha

$$\begin{aligned}
 f(s) &= \underbrace{\dots \frac{c_{-k}}{(s - s_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{s - s_0}}_{(+)} + \underbrace{c_0 + c_1(s - s_0) + \dots + c_k(s - s_0)^k + \dots}_{(*)} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (s - s_0)^k,
 \end{aligned} \tag{14}$$

dove i coefficienti c_k (chiamati coefficienti di Laurent) sono dati dalla formula

$$c_k = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{k+1}} ds, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{15}$$

e γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo (cioè antiorario), interna all'intorno I e contenente al proprio interno il punto s_0 .

La serie (14) si chiama serie di Laurent in s_0 ; la serie di Laurent in s_0 è quindi una serie di potenze del binomio $(s - s_0)$ ad esponente intero (positivo, negativo, nullo). In particolare, la serie (+) in (14), relativa alle potenze del binomio $(s - s_0)$ ad esponente negativo si chiama **parte principale** della serie di Laurent e la parte (*) rimanente si dice **parte analitica**.

PROPRIETÀ:

- ◆ Lo sviluppo in serie di Laurent è unico.
- ◆ La serie di Laurent è derivabile termine a termine in ogni insieme aperto la cui chiusura è contenuta in $I - \{s_0\}$.

Dal Teorema di Laurent si ha il seguente:

Corollario 1 (Taylor). *Sia f analitica in **tutto** I , s_0 compreso. Allora per ogni $s \in I$ si ha*

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (s - s_0)^k = c_0 + c_1 (s - s_0) + \dots + c_k (s - s_0)^k + \dots \quad (16)$$

ossia la serie di Laurent in s_0 è priva di parte principale.

In questo caso infatti, dall'espressione dei coefficienti nella serie di Laurent, se γ è una curva semplice, chiusa, (generalmente) regolare contenuta in I e percorsa in senso positivo, si ha

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f(s) (s - s_0)^{k-1} ds = 0 \quad \text{per ogni } k \geq 1$$

per il primo teorema di Cauchy, essendo $f(s)(s - s_0)^{k-1}$ analitica in I per ogni $k \geq 1$.

La formula (16) esprime il fatto che una funzione analitica in un intorno I di un punto s_0 è in tale intorno sviluppabile in serie di potenze ad esponente non negativo e tale serie (i.e. (16)) si chiama *serie (o sviluppo) di Taylor di f in s_0* .

Utilizzando la proprietà che lo sviluppo di Laurent (16) è unico, si ottengono poi i seguenti sviluppi “notevoli” in $s = 0$:

$$\begin{aligned} e^s &= 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots + \frac{s^n}{n!} + \dots & \forall s \in \mathbb{C} \\ \sin s &= s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots & \forall s \in \mathbb{C} \\ \cos s &= 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{s^{2n}}{(2n)!} + \dots & \forall s \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{1-s} &= 1 + s + s^2 + \dots + s^n + \dots & \forall s : |s| < 1. \end{aligned}$$

Si osservi che lo sviluppo in serie di Laurent dell’ultima funzione nella singolarità $s = 1$ è la funzione stessa: $1/(1-s) = -1/(s-1)$, $\forall s \neq 1$.

Dalla sviluppabilità in serie di Taylor, discende poi il seguente risultato, già parzialmente anticipato.

Corollario - *Sia $V \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e sia f una funzione, $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Allora le seguenti quattro affermazioni sono **equivalenti**:*

- 1) $f \in C^1(V)$ [i.e. f è analitica in V];
- 2) le funzioni u, v ($u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$) sono derivabili parzialmente in V con derivate continue ed inoltre in V valgono le formule (di Cauchy-Riemann):

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= v_y(x, y) \\ u_y(x, y) &= -v_x(x, y); \end{aligned}$$

- 3) $f \in C^\infty(V)$;
- 4) f è sviluppabile in serie di potenze in V . Inoltre le derivate di qualunque ordine possono essere calcolate derivando la serie termine a termine.

Si osservi che nell’ambito dell’analisi reale in generale il precedente risultato può non essere vero, nel senso che esistono funzioni (reali di variabile reale) di classe C^∞ in un intervallo, ma non sviluppabili in serie di potenze in tale intervallo. Ad esempio:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

è di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}$ e si ha: $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Pertanto la serie di Taylor relativa non converge a $f(x)$. Inoltre, chiaramente, esistono poi funzioni che sono derivabili soltanto un numero finito di volte. Pertanto, nell'ambito dell'analisi reale, in riferimento al corollario precedente si ha

$$1) \not\Rightarrow 3)$$

$$3) \not\Rightarrow 4).$$

Il Teorema di Laurent fornisce una equivalente classificazione delle singolarità isolate. Vale infatti il seguente:

Teorema (IMPORTANTE!!) *Sia s_0 una singolarità isolata per f . Allora:*

(i) s_0 è singolarità eliminabile se e solo se la serie di Laurent associata ha solo parte analitica (i.e. $c_k = 0$ per ogni indice $k < 0$);

(ii) s_0 è singolarità polare di ordine $N(> 0)$ se e solo se nella serie di Laurent associata si ha $c_{-N} \neq 0$ e $c_{-k} = 0$ per ogni indice $k > N$ (e quindi la parte principale è composta da un numero finito di termini);

(iii) s_0 è singolarità essenziale se e solo se la parte principale della serie di Laurent associata ha infiniti termini non nulli.

Attenzione a non confondere l'ordine del polo N con il numero degli elementi non nulli della parte principale della serie di Laurent. Analogamente, nel caso di singolarità essenziali la parte principale ha sì infiniti termini, ma non è detto che TUTTI i coefficienti c_{-i} , con $i > 0$, siano non nulli.

ESERCIZI

1. Usando la derivabilità termine a termine della serie (16) e l'unicità dello sviluppo in serie di Taylor, si provi il seguente risultato:

Corollario 2. *Sia f analitica in tutto V , s_0 compreso e sia (16) la serie di Taylor associata. Allora*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!}.$$

Attenzione! Tale formula non vale se s_0 è un punto di singolarità per f .

2. Si consideri la funzione $f(s) = s \sin(1/s)$. Sviluppando f in serie di Laurent in un intorno di $s = 0$ si ha

$$f(s) = s \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{3!} \frac{1}{s^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{s^5} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{3!} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{5!} \frac{1}{s^4} + \dots$$

Poiché la parte principale di tale sviluppo ha infiniti termini, allora $s = 0$ è una singolarità essenziale per $f(s) = s \sin(1/s)$. Lo stesso vale per la funzione $g(s) = s^n \sin(1/s)$, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$.

3. Sia f analitica in un aperto V , e sia $s_0 \in V$. Provare che, se γ è una qualunque curva (generalmente) regolare, chiusa, semplice, contenuta in V e percorsa in senso positivo:

$$f(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s - s_0} ds.$$

Questa proprietà spiega, in particolare, il risultato (13). Analogamente:

$$f^{(n)}(s_0) = \frac{n!}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{n+1}} ds,$$

da cui segue (se $f(s) \equiv 1$)

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(s - s_0)^{n+1}} ds = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

18 Classificazione del punto all'infinito.

La classificazione delle singolarità al finito si estende con facilità al punto all'infinito. Precisamente:

Definizione - Il punto $s = \infty$ si dice singolarità (isolata o non isolata e, nel primo caso, eliminabile, polare o essenziale) se lo è il punto $u = 0$ per la funzione $g(u) = f(1/u)$.

Esempi - Classificare il punto $s = \infty$ per le funzioni razionali

$$f(s) = \frac{2s}{9s+1}, \quad g(s) = \frac{2s^5}{9s+1}, \quad h(s) = \frac{2s}{9s^3+1}.$$

Per la funzione f , il punto $s = \infty$ è una singolarità eliminabile, e così per h (in quest'ultimo caso $s = \infty$ è anche uno zero doppio). Per la funzione g , il punto $s = \infty$ è un polo di ordine 4.

In generale, una funzione razionale (i.e. il rapporto tra due polinomi N e D)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

ha un polo in $s = \infty$ di ordine $p > 0$ se e solo se grado N – grado $D = p$, ha un punto di singolarità eliminabile (con limite non nullo) se e solo se grado $N =$ grado D , ha uno zero di ordine $m > 0$ se e solo se grado D – grado $N = m$.

Esercizio - Classificare $s = \infty$ per le funzioni seguenti:

$$f(s) = e^{1/s} \quad (s = \infty \text{ sing. eliminabile})$$

$$f(s) = s \sin\left(\frac{1}{s}\right) \quad (s = \infty \text{ sing. eliminabile})$$

$$f(s) = \frac{1}{\sin s} \quad (s = \infty \text{ sing. non isolata})$$

$$f(s) = e^s \quad (s = \infty \text{ sing. essenziale})$$

$$f(s) = \frac{s^3 + 1}{s + 4} \quad (s = \infty \text{ polo di ordine 2}).$$

Nella classificazione delle singolarità si rivelano particolarmente utili i seguenti:

Teorema Ogni funzione **non** razionale ha singolarità essenziali e/o non isolate. Viceversa, se una funzione ha almeno una singolarità essenziale o non isolata, allora tale funzione è **non** razionale.

Corollario Sia f una funzione razionale. Allora f è costante oppure ha **soltanto** singolarità di tipo eliminabile e/o polare.

Esercizio : Classificare le singolarità di

$$f_1(s) = \frac{\sin s}{(s-4)(e^s-1)}, \quad f_2(s) = \frac{5s^2-s}{e^{4js}-1}.$$

Risposta. f_1 ha come singolarità al finito: $s = 4$ polo semplice, $s = 0$ sing. eliminabile, $s_k = j2k\pi$ poli semplici per ogni $k \neq 0, k \in \mathbb{Z}$; $s = \infty$ è dunque una singolarità di accumulazione.

f_2 ha come singolarità al finito: $s = 0$ sing. eliminabile, $s_k = k\pi/2$ poli semplici per ogni $k \neq 0, k \in \mathbb{Z}$; $s = \infty$ è dunque una singolarità di accumulazione.

19 Residui

Sia s_0 una singolarità isolata per f . Allora, come si è visto, esiste un intorno V di s_0 tale che f è analitica in $V/\{s_0\}$ e f è sviluppabile in serie di Laurent in tale intorno, ossia $\forall s \in V/\{s_0\}$ si ha

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (s - s_0)^n$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{n+1}} ds \quad (17)$$

e γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo, interna all'intorno V e contenente al proprio interno il punto s_0 .

DEF. Si chiama *Residuo di f in s_0* , e si indica con $\text{Res}[f, s_0]$ il numero

$$\text{Res}[f, s_0] = c_{-1}$$

dove c_{-1} è il coefficiente della serie di Laurent associata, relativo al termine $(s - s_0)^{-1}$.

Da (17) ne segue allora

$$\text{Res}[f, s_0] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f(s) ds.$$

Il 3° Teorema di Cauchy, visto nelle lezioni scorse, può allora essere riformulato nel modo seguente:

1° Teorema dei Residui *Sia Γ una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo. Sia f analitica all'interno di Γ eccetto un numero FINITO di punti $s_1, s_2, \dots, s_N$. Sia infine f continua su Γ . Allora*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(s) ds = \text{Res}[f, s_1] + \text{Res}[f, s_2] + \dots + \text{Res}[f, s_N].$$

20 Formule per il calcolo dei Residui

Si ha, ricordando che $\text{Res}[f, s_0] = c_{-1}$ e utilizzando lo sviluppo di Laurent:

$$1) s_0 \text{ sing. eliminabile} \implies \text{Res}[f, s_0] = 0; \quad (*)$$

$$2) s_0 \text{ polo semplice} \implies \text{Res}[f, s_0] = \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) f(s)$$

$$3) s_0 \text{ polo ordine } N > 1 \implies$$

$$\text{Res}[f, s_0] = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{ds^{N-1}} [(s - s_0)^N f(s)] \quad (**)$$

Infatti: 1) banalmente se la singolarità è eliminabile, allora $c_{-1} = 0$.

2) Se s_0 è un polo semplice, allora

$$f(s)(s - s_0) = c_{-1} + c_0(s - s_0) + c_1(s - s_0)^2 + \dots + c_k(s - s_0)^{k+1} + \dots$$

da cui segue (*).

3) Supponiamo ad esempio che s_0 sia un polo doppio. Allora

$$f(s)(s - s_0)^2 = c_{-2} + c_{-1}(s - s_0) + c_0(s - s_0)^2 + c_1(s - s_0)^3 + \dots + c_k(s - s_0)^{k+2} + \dots$$

e

$$\frac{d}{ds} [f(s)(s - s_0)^2] = c_{-1} + 2c_0(s - s_0) + 3c_1(s - s_0)^2 + \dots + (k+1)c_k(s - s_0)^{k+1} + \dots$$

da cui segue (**) per $N = 2$. La formula per N generale si dimostra analogamente.

Si osservi che il viceversa dell'implicazione (*) può essere falso. Ad esempio la funzione

$$f(s) = \frac{1}{s^3} \quad (18)$$

ha in $s = 0$ un polo del terzo ordine. Poiché lo sviluppo in serie di Laurent di f in un intorno di $s = 0$ **coincide** con (18) (ricordiamo che tale sviluppo è una serie di potenze di s , con esponente positivo o negativo), si ha $c_{-1} = 0$

e, di conseguenza, $\text{Res}[f, 0] = 0$. Alla stessa conclusione si può giungere utilizzando la formula (**).

Se s_0 è un polo semplice per f allora necessariamente il limite

$$\lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) f(s)$$

esiste finito e non nullo. Pertanto, in tal caso $\text{Res}[f, s_0] \neq 0$. Se invece s_0 è un polo di ordine $N > 1$, allora può aversi $\text{Res}[f, s_0] = 0$, come abbiamo visto nel precedente esempio.

Si osservi infine che nessuna formula è data nel caso di una **singularità essenziale**. Se s_0 è essenziale, il calcolo del residuo in s_0 può essere fatto o scrivendo lo sviluppo in serie di Laurent di f in un intorno del punto (il residuo in s_0 è il coefficiente di $(s - s_0)^{-1}$ in tale sviluppo), oppure, come vedremo, “aggirando” il problema.

Ad esempio, per la funzione $f(s) = \sin(1/s)$, che ha in $s = 0$ una singolarità essenziale, risulta:

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s^{2k+1}(2k+1)!} = \frac{1}{s} - \frac{1}{6s^3} + \dots$$

e dunque

$$\text{Res}[\sin(1/s), 0] = 1.$$

Esercizio n. 1 Calcolare ($\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{2s+1}{s(s+4)(s+1)^2} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda interne a γ sono $s = 0$ e $s = -1$. Si ha poi che $s = 0$ è un polo semplice e $s = -1$ è un polo doppio. Pertanto

$$I_1 = \text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, -1]$$

e

$$\begin{aligned} \text{Res}[f, 0] &= \lim_{s \rightarrow 0} s f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s+1}{(s+4)(s+1)^2} = \frac{1}{4} \\ \text{Res}[f, -1] &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} [(s+1)^2 f(s)] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \frac{2s+1}{s(s+4)} = -\frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Esercizio n. 2 Calcolare ($\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{\sin s}{s^3 + 6s^2 + 8s} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda interne a γ sono $s = 0$ e $s = -2$. Si ha poi che $s = 0$ è eliminabile e $s = -2$ è un polo semplice. Pertanto

$$I_2 = \text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, -2]$$

e

$$\text{Res}[f, 0] = 0$$

$$\text{Res}[f, -2] = \lim_{s \rightarrow -2} (s + 2)f(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{\sin s}{s(s + 4)} = \frac{\sin 2}{4}.$$

Esercizio n. 3 Calcolare ($\gamma(t) = 8e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$I_3 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{\sin s}{s^2 - 7s} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda sono $s = 0$ e $s = 7$. Entrambe sono interne a γ . Si ha poi che $s = 0$ è eliminabile e $s = 7$ è un polo semplice. Pertanto

$$I_2 = \text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, 7]$$

e

$$\text{Res}[f, 0] = 0$$

$$\text{Res}[f, 7] = \lim_{s \rightarrow 7} (s - 7)f(s) = \lim_{s \rightarrow 7} \frac{(s - 7) \sin s}{s(s - 7)} = \frac{\sin 7}{7}.$$

Esercizio n. 4 Provare che ($\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$I_4 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{s}{e^{2s} - 1} ds = 0.$$

Soluzione: le singolarità sono $s = k\pi j$, $k \neq 0$ (poli semplice); $s = 0$ (eliminabile); $s = \infty$ (non isolata). Solo $s = 0$ è interna a γ .

Esercizio n. 5 Provare che $(\gamma(t) = 5e^{jt}, t \in [0, 2\pi])$

$$I_5 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{4s}{(s-4)\sin(s/2)} ds = \frac{16}{\sin 2}.$$

Soluzione: le singolarità sono $s = 4$ (polo semplice); $s = 0$ (eliminabile); $s_k = 2k\pi$, $k \neq 0$, (poli semplici); $s = \infty$ (non isolata). Solo $s = 0$ e $s = 4$ sono interne a γ .

21 Serie di Laurent all'infinito

Si consideri

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{e^{1/s}}{(s-1)s} ds, \quad (19)$$

dove $\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$. Le singolarità della funzione integranda (interne a γ) sono $s = 0$ e $s = 1$. Entrambe sono, ovviamente, isolate e $s = 1$ è un polo semplice, mentre $s = 0$ è essenziale. Per calcolare il $\text{Res}[f, 0]$, e di conseguenza I , le formule viste in precedenza non sono utilizzabili. In questo caso possiamo procedere estendendo il Teorema di Laurent all'infinito e introducendo il concetto di Residuo all'infinito. Precisamente:

Teorema di Laurent in $s = \infty$. Sia f analitica all'ESTERNO di una circonferenza di centro l'origine e raggio R (sufficientemente grande). Allora per s tale che $|s| > R$ si ha

$$f(s) = \underbrace{\dots \frac{d_{-k}}{s^k} + \dots + \frac{d_{-1}}{s} + d_0}_{(+)} + \underbrace{d_1 s + \dots + d_k s^k + \dots}_{(*)} \quad (20)$$

dove i coefficienti d_k (chiamati coefficienti di Laurent all'infinito) sono dati dalla formula

$$d_k = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{s^{k+1}} ds, \quad (21)$$

dove Γ è una circonferenza percorsa una sola volta in senso positivo, di centro l'origine e raggio $R_1 > R$.

La serie (20) prende nome di *serie di Laurent all'infinito*. Tale serie è **formalmente** analoga alla serie di Laurent in $s = 0$, ma solo formalmente. Infatti quest'ultima converge in un intorno di $s = 0$, mentre la serie di Laurent all'infinito (20) converge per $|s|$ grande.

La serie (+) in (20) si chiama *parte analitica* della serie di Laurent all'infinito e la parte (*) *parte principale*. Quindi all'infinito parte analitica e parte principale “si scambiano” (eccetto d_0).

22 Residuo all'infinito

Definizione. Sia f analitica per $|s|$ sufficientemente grande, i.e. per $|s| > R$. Questo fatto implica che $s = \infty$ è una singolarità isolata per f

oppure un punto di regolarità. Si chiama *Residuo di f all'infinito*, e si indica con $\text{Res}[f, \infty]$, il numero

$$\text{Res}[f, \infty] = -d_{-1}$$

dove d_{-1} è il coefficiente della serie di Laurent all'infinito (20), relativo al termine s^{-1} .

Da (21) si ha allora

$$\text{Res}[f, \infty] = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(s) ds \quad (22)$$

dove Γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo che contiene al proprio interno **tutte** le singolarità al finito di f .

Poiché il termine s^{-1} appartiene alla parte *analitica* dello sviluppo in serie di Laurent all'infinito, i concetti di Residuo all'infinito e Residuo al finito presentano differenze **sostanziali**. Ad esempio $s = \infty$ può essere una singolarità eliminabile (oppure un punto di regolarità) ed aversi

$$\text{Res}[f, \infty] \neq 0$$

il che al finito NON può accadere. È sufficiente, ad esempio, considerare la funzione

$$f(s) = \frac{5s + 7}{s^2} = \frac{5}{s} + \frac{7}{s^2}$$

per la quale si ha $\text{Res}[f, \infty] = -5 \neq 0$, eppure $s = \infty$ è uno zero per f . Inoltre $s = \infty$ può essere un polo semplice ed aversi

$$\text{Res}[f, \infty] = 0$$

e anche questo fatto al finito NON può accadere. A tal fine è sufficiente considerare la funzione

$$g(s) = 4s + 8$$

per la quale si ha $\text{Res}[g, \infty] = 0$, eppure $s = \infty$ è un polo semplice per g .

Dal primo teorema dei Residui e dalla definizione di Residuo all'infinito, segue subito il seguente teorema:

2° Teorema dei Residui. *Sia f analitica in tutto il piano complesso eccetto un numero FINITO di punti $s_1, s_2, \dots, s_N$. Allora la somma di tutti i Residui, compreso il Residuo all'infinito, è nulla, ossia*

$$\text{Res}[f, s_1] + \text{Res}[f, s_2] + \dots + \text{Res}[f, s_N] + \text{Res}[f, \infty] = 0.$$

Infatti, se Γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo che contiene al proprio interno tutte le singolarità al finito di f , vale la (22), ma anche, dal primo teorema dei Residui:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(s) ds = \sum_{k=1}^N \text{Res}[f, s_k],$$

da cui segue

$$\sum_{k=1}^N \text{Res}[f, s_k] = -\text{Res}[f, \infty].$$

Il secondo teorema dei Residui trova un'interessante applicazione nel caso in cui una data funzione abbia una singolarità essenziale, e tutte le altre singolarità (compreso il punto all'infinito) siano eliminabili e/o polari. Ad esempio, le funzioni $f_1(s) = e^s$, $f_2(s) = \sin s$ hanno in $s = \infty$ una singolarità essenziale. Essendo analitiche in tutto $\mathbb{C}$ (non avendo cioè singolarità al finito), risulta immediatamente $\text{Res}[e^s, \infty] = 0 = \text{Res}[\sin s, \infty]$.

23 Formule per il calcolo del Residuo all'infinito.

Per quanto visto, $\text{Res}[f, \infty]$ è definito se e solo f è analitica per $|s|$ sufficientemente grande o, EQUIVALENTEMENTE, se e solo se $s = \infty$ è una singolarità isolata per f oppure un punto di regolarità.

Il $\text{Res}[f, \infty]$ non è pertanto definito quando $s = \infty$ è una singolarità non isolata (di accumulazione) per f .

Sia p un intero positivo. Diremo poi che $s = \infty$ è *uno zero di ordine p per f* se f è analitica per $|s|$ sufficientemente grande, $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0$ e

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^p f(s) \quad \text{esiste finito e non nullo.} \quad (23)$$

Si osservi che la condizione (23) è equivalente alla seguente

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^k f(s) = 0 \text{ per } k = 0, 1, \dots, p-1, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s^p f(s) \text{ esiste finito e non nullo.}$$

Utilizzando la serie di Laurent all'infinito, si può provare che $s = \infty$ è uno zero di ordine p per f se e solo se lo sviluppo di Laurent all'infinito è privo di parte principale, ed è del tipo

$$f(s) = \frac{d_{-p}}{s^p} + \frac{d_{-p-1}}{s^{p+1}} + \frac{d_{-p-2}}{s^{p+2}} + \dots, \text{ con } d_{-p} \neq 0.$$

Da ciò si ha subito:

Teorema 1 *Sia f analitica per $|s|$ grande. Allora se $s = \infty$ è uno zero per f di ordine $p \geq 2$, si ha*

$$\text{Res}[f, \infty] = 0.$$

Una formula per il calcolo del residuo all'infinito si ottiene mediante l'inversione per raggi reciproci.

Teorema 2 *Sia f analitica per $|s|$ grande. Allora*

$$\text{Res}[f, \infty] = -\text{Res}[g(u), 0], \quad (24)$$

dove

$$g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right) \frac{1}{u^2}, \quad (25)$$

Infatti, utilizzando l'inversione per raggi reciproci, essendo $f(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k s^k$ si ottiene:

$$G(u) = f\left(\frac{1}{u}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k u^{-k}$$

e d_{-1} è il coefficiente del termine u nello sviluppo di Laurent di G . Dunque d_{-1} non è il Residuo di G in $s = 0$, ma lo è della funzione $g(u) = G(u)/u^2$.

Si osservi che il Teorema 2 riconduce il calcolo del residuo all'infinito al calcolo del residuo al finito (in zero) della funzione “ausiliaria” g . Pertanto, nella scelta della formula da utilizzare per il calcolo del residuo conta il tipo di singolarità che ha g in $u = 0$ e NON tipo di singolarità che ha f in $s = \infty$. (Ad esempio, se f ha uno zero semplice in $s = \infty$, allora g ha un polo semplice in $u = 0$).

24 Esercizi

◆ 1) Calcolare

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{4}{(s-4)^2 s} ds,$$

dove $\gamma(t) = 5e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Le singolarità della funzione integranda sono $s = 0$ (polo semplice) e $s = 4$ (polo doppio). Sono entrambe interne a γ e quindi, per il primo Teorema dei Residui si ha

$$I_1 = \text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, 4].$$

Applicando il secondo Teorema dei Residui si ha anche

$$\text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, 4] + \text{Res}[f, \infty] = 0$$

e quindi

$$I_1 = -\text{Res}[f, \infty].$$

Poiché f ha in $s = \infty$ uno zero triplo, ne segue $\text{Res}[f, \infty] = 0$ e quindi

$$I_1 = 0.$$

◆ 2) Calcolare

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{ds}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-10)},$$

dove $\gamma(t) = 5e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Applicando il primo e secondo Teorema dei Residui, si ha

$$I_2 = \text{Res}[f, 1] + \text{Res}[f, 2] + \text{Res}[f, 3] + \text{Res}[f, 4] = -\text{Res}[f, 10] - \text{Res}[f, \infty].$$

Poiché la funzione integranda ha uno zero di ordine 5 in $s = \infty$, si ha $\text{Res}[f, \infty] = 0$. Inoltre, essendo $s = 10$ polo semplice, si ha

$$\text{Res}[f, 10] = \lim_{s \rightarrow 10} \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)} = \frac{1}{3024}$$

e quindi

$$I_2 = -\frac{1}{3024}.$$

◆ 3) Calcolare

$$I_3 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{(s+1) \sin(1/s)}{s} ds,$$

dove $\gamma(t) = 5e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

L'unica singolarità della funzione integranda al finito è $s = 0$, che è di tipo essenziale. In $s = \infty$ la funzione integranda ha uno zero semplice. Applicando il primo e secondo Teorema dei Residui, si ha

$$I_3 = \text{Res}[f, 0] = -\text{Res}[f, \infty].$$

Da (25) si ha

$$g(u) = \frac{1+u}{u^2} \sin u$$

e poiché $u = 0$ è un polo semplice per g , si ha

$$\text{Res}[g, 0] = \lim_{u \rightarrow 0} u g(u) = \lim_{u \rightarrow 0} (1+u) \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Applicando la formula (24) si ottiene:

$$\text{Res}[f, \infty] = -1.$$

◆ 4) Calcolare i seguenti integrali lungo le curve indicate:

$$I_4 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{5s+1}{s^4+2} ds \quad \gamma(t) = 6e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_5 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{4s^8+3}{s^9+1} ds \quad \gamma(t) = 6e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_6 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{se^{1/s}}{(s-1)(s-3)} ds \quad \gamma(t) = 6e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_7 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{se^{1/s}}{(s-1)(s-3)} ds \quad \gamma(t) = 2e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

Soluzione :

$$I_4 = 0, \quad I_5 = 4, \quad I_6 = 1, \quad I_7 = 1 - e^{1/3} 3/2.$$

◆ 5) Per ciascuna delle seguenti funzioni, stabilire:

(i) se è applicabile il secondo Teorema dei Residui;

(ii) se esiste il residuo all'infinito e, in caso affermativo, calcolarlo.

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \frac{e^{1/s^2}}{\sin s^2}; & f_2(s) &= e^{1/s^2}(\sin s^2); & f_3(s) &= \frac{\sin s^2}{e^{1/s^2}}; \\ f_4(s) &= \frac{\sin s^2}{e^{1/s^2} - 1}; & f_5(s) &= \sin(s^2 + s^4 + 3); & f_6(s) &= \frac{\sin(s^2 + s^4 + 31)}{s - 3}. \end{aligned}$$

Approfondimenti: funzioni con numero infinito di singolarità

Consideriamo il caso di un integrale esteso ad una curva γ chiusa, semplice, (generalmente) regolare, percorsa in senso positivo, di una funzione f che presenta infinite singolarità interne alla curva γ ma è continua sulla curva:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f(s) ds.$$

Si faccia attenzione al fatto che:

- il I teorema dei Residui non può essere applicato in quanto f ha infinite singolarità interne a γ ;
- il II teorema dei Residui non può essere applicato in quanto f ha infinite singolarità.

In qualche caso è possibile comunque calcolare tale integrale, seguendo alcuni semplici ragionamenti. Vediamo i due casi principali:

1) f è analitica esternamente a γ .

In questo caso tutte le (infinite) singolarità sono interne a γ e possiamo usare la *definizione di Residuo* all'infinito (22) e la formula (24)

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f(s) ds = -\text{Res}[f, \infty] = \text{Res} \left[\frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right), 0 \right].$$

2) f è analitica esternamente a γ eccetto un numero finito di punti.

In questo caso dobbiamo utilizzare, oltre alla definizione di Residuo all'infinito, anche il secondo ed il terzo teorema di Cauchy. (Si veda il paragrafo 15)

Si osservi che nessuna condizione è posta su f internamente alla curve γ_2 e γ_3 nel terzo teorema di Cauchy; f può avere 1, 2 o anche infinite singolarità

interne ad ognuna delle due curve. Allora, dette $s_1, s_2, \dots, s_N$ le singolarità *esterne* alla curva, utilizzando il terzo teorema di Cauchy e la definizione di residuo sia al finito che all'infinito, risulta:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f(s) ds + \sum_{k=1}^N \text{Res}[f, s_k] = -\text{Res}[f, \infty],$$

i.e.,

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f(s) ds = - \sum_{k=1}^N \text{Res}[f, s_k] - \text{Res}[f, \infty],$$

Esempi

1) Calcolare

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{1}{s^2 \sin(1/s)} ds, \quad \gamma(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi].$$

Soluzione: Le singolarità di f sono: $s_k = 1/(k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ poli semplici, $s = 0$ singolarità di accumulazione, $s = \infty$ zero del primo ordine. Poiché *tutte* le singolarità al finito di f sono interne a γ , dalla definizione di Residuo all'infinito si ha:

$$I = -\text{Res}[f, \infty] = \text{Res} \left[\frac{1}{u^2} \frac{u^2}{\sin u}, 0 \right] = \text{Res} \left[\frac{1}{\sin u}, 0 \right] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1.$$

2) Calcolare

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{s}{(e^{1/s} - 1)(s - 2)^4} ds, \quad \gamma(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi].$$

Soluzione: Le singolarità di f sono: $s_k = j/(2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ poli semplici, $s = 0$ singolarità di accumulazione, $s = 2$ polo di ordine 4, $s = \infty$ zero di ordine 2. Poiché *tutte* le singolarità al finito di f sono interne a γ , dalla definizione di Residuo all'infinito si ha:

$$I = -\text{Res}[f, \infty] = 0.$$

3) Calcolare

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{s}{(e^{1/s} - 1)(s - 2)^4(s - 5)} ds, \quad \gamma(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi].$$

Soluzione: Le singolarità di f sono: $s_k = j/(2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ poli semplici, $s = 0$ singolarità di accumulazione, $s = 2$ polo di ordine 4, $s = 5$ polo semplice, $s = \infty$ zero di ordine 2. Poiché esternamente a γ ho solo la singolarità $s = 5$, dal terzo teorema di Cauchy e dalla definizione di Residuo all'infinito si ha:

$$I = -\text{Res}[f, 5] - \text{Res}[f, \infty] = -\lim_{s \rightarrow 5} \frac{s}{(e^{1/s} - 1)(s - 2)^4} - 0 = \frac{5}{(e^{1/5} - 1)3^4}.$$

25 Alcuni risultati “teorici”

Teorema (di Liouville). *Sia f analitica e limitata in tutto il piano complesso. Allora f è costante.*

Questa proprietà non ha riscontro nell'ambito dell'analisi reale. Ad esempio, la funzione reale $\sin x$ è limitata e sviluppabile in serie di potenze, ma non è costante!

Il teorema di Liouville si prova utilizzando la formula integrale di Cauchy

$$f'(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^2} ds,$$

dove γ è una circonferenza, percorsa in senso positivo, di centro s_0 e raggio $R > 0$. Posto $M = \sup |f(s)|$, risulta quindi: $|f(s)/(s - s_0)^2| \leq M/R^2$ per ogni $s \in \gamma$ e dunque

$$|f'(s_0)| \leq \frac{M}{2\pi R^2} 2\pi R = \frac{M}{R}.$$

Essendo f analitica in tutto $\mathbb{C}$, R può essere arbitrariamente grande, da cui necessariamente $f'(s_0) = 0$. Dall'arbitrarietà di s_0 segue quindi $f'(s) = 0$ per ogni s i.e., f costante.

Dal Teorema di Liouville si hanno poi le due seguenti conseguenze:

Corollario 1. *Sia f priva di singolarità al finito e all'infinito. Allora f è costante.*

Corollario 2 (Teorema fondamentale dell'algebra di D'Alembert)
Ogni polinomio P di grado $n \geq 1$ ha almeno uno zero in $\mathbb{C}$.

Il teorema fondamentale dell'algebra si prova considerando la funzione $f(s) = 1/P(s)$ e ragionando per assurdo: se P non ha zeri in $\mathbb{C}$ allora f è

analitica in tutto $\mathbb{C}$. Inoltre $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0$ essendo $grP \geq 1$, da cui f è limitata in $\mathbb{C}$, e dal teorema di Liouville si ha l'assurdo.

Vale inoltre il seguente:

Teorema *Sia f analitica in un aperto Ω , e sia f non identicamente nulla. Allora gli eventuali zeri di f in Ω sono isolati.*

Infatti, se s_0 è uno zero di ordine N per f , si ha

$$f(s) = \sum_{k=N}^{\infty} c_k (s - s_0)^k = (s - s_0)^N \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+N} (s - s_0)^k = (s - s_0)^N g(s),$$

dove g è analitica in Ω e $g(s_0) = c_N \neq 0$. Per il teorema della permanenza del segno (in $\mathbb{R}$), essendo $|g(s_0)| > 0$, esiste un intorno $B_R(s_0)$ di s_0 , contenuto in Ω , e tale che $|g(s)| > 0$ in $B_R(s_0)$. Allora $|f(s)| = |s - s_0|^N |g(s)| > 0$ in $B_R(s_0) - \{s_0\}$, i.e., $f(s) \neq 0$ per ogni $s \in B_R(s_0)$, $s \neq s_0$.

Anche questa proprietà non ha riscontro nell'ambito dell'analisi reale, come illustra, ad esempio, la funzione reale

$$g(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

per la quale $x = 0$ è uno zero non isolato.

Dal teorema precedente deriva l'unicità della estensione analitica (teorema di Weierstrass). In particolare vale il risultato più generale:

Corollario *Siano f_1, f_2 due funzioni complesse, analitiche in un aperto connesso Ω . Se f_1 e f_2 coincidono in un sottoinsieme di Ω dotato di almeno un punto di accumulazione, allora esse coincidono su tutto Ω .*

Per provare il risultato precedente, basta considerare la differenza $f_1 - f_2$ e applicare il teorema degli zeri.

Sia s_0 una singolarità isolata per f . Se s_0 è una singolarità polare, allora f è non limitata in un intorno di tale singolarità, in quanto $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = \infty$. Esaminiamo ora le altre due possibilità, ossia s_0 singolarità eliminabile o essenziale.

Il comportamento di una funzione nell'intorno di una singolarità eliminabile è illustrato dal seguente teorema.

Teorema. *Sia s_0 una singolarità isolata per f . Allora s_0 è eliminabile SE E SOLO SE f è limitata in un intorno di s_0 .*

Si osservi che tale proprietà non ha riscontro nell'ambito dell'analisi reale. Infatti, come è ben noto, per le funzioni reali di variabile reale la limitatezza di una funzione φ nell'intorno di un punto x_0 NON implica l'esistenza del limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$. Ad esempio, è sufficiente considerare la funzione $\varphi(x) = \sin(1/x)$, che è limitata in un intorno di $x = 0$, ma per la quale il $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ non esiste.

Il comportamento di una funzione nell'intorno di una singolarità essenziale è infine illustrato dal seguente teorema.

Teorema di Casorati *Sia s_0 una singolarità essenziale per f . Allora per ogni numero complesso α , esiste una successione $\{s_n\}$ convergente a s_0 , tale che la successione trasformata $\{f(s_n)\}$ converge ad α .*

In altre parole, il Teorema di Casorati esprime il fatto che in **ogni** intorno di una singolarità essenziale la funzione approssima, **con la precisione voluta**, un **qualunque** numero complesso.