APPLICAZIONI di MATEMATICA

1 Serie di potenze e trasformata Zeta

1.1 Serie di Potenze (Richiami)

Premettiamo alcuni richiami sulle serie di potenze.

Sia $\{a_n\}$ una successione di costanti reali o complesse; si chiama allora *serie di potenze* una serie del tipo

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \tag{1}$$

dove s indica un numero complesso.

Ogni serie di potenze del tipo (1) converge per $s = 0$. Inoltre se essa converge per un valore $s = s_0 \neq 0$, allora essa converge assolutamente per qualsiasi valore della variabile s di modulo minore di $|s_0|$. Se invece per $s = s_0$ la serie (1) non converge, allora (1) non converge per qualsiasi valore della variabile s di modulo maggiore di $|s_0|$. In altri termini se (1) converge per $s = s_0$, allora (1) converge assolutamente in tutti i punti interni alla circonferenza di centro l'origine e raggio $|s_0|$; se invece (1) non converge per $s = s_0$, allora (1) non converge in tutti i punti esterni a tale circonferenza.

Vi sono serie di potenze che convergono solo per $s = 0$; tale è, ad esempio, la serie

$$1 + 1!s + 2!s^2 + 3!s^3 + \cdots + n!s^n + \cdots ;$$

altre serie invece convergono per ogni valore della variabile s, come, ad esempio, la serie esponenziale

$$1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \cdots + \frac{s^n}{n!} + \cdots .$$

Vi sono infine delle serie che, per alcuni valori di s, di modulo positivo, convergono e per altri valori di s non convergono. Un esempio in tal senso è dato dalla serie geometrica

$$1 + s + s^2 + s^3 + \cdots + s^n + \cdots \tag{2}$$

che converge per valori di s di modulo minore di 1 e non converge per valori di s di modulo maggiore di 1.

Consideriamo ora una serie di potenze della forma (1) che, per qualche $s_1 \neq 0$ sia convergente e per altri valori s_2 sia non convergente. A tale serie è possibile associare un numero reale positivo ρ che coincide con l'estremo superiore dei moduli dei valori di s per i quali (1) converge. Pertanto

(1) converge assolutamente per ogni s tale che $|s| < \rho$;

(1) non converge per ogni s tale che $|s| > \rho$.

Tale valore ρ prende il nome di *raggio di convergenza* e la circonferenza di centro l'origine e raggio ρ si chiama *circonferenza di convergenza* e il suo interno *cerchio di convergenza*.

Se la serie considerata converge soltanto per $s = 0$, diremo che il suo raggio di convergenza è nullo e porremo, per convenzione, $\rho = 0$. Analogamente, se la serie converge per ogni valore di s, diremo che il suo raggio di convergenza è infinito e porremo $\rho = \infty$. In quest'ultimo caso il cerchio di convergenza coinciderà con l'intero piano complesso.

Vediamo ora come può essere determinato il raggio di convergenza. A tal fine ricordiamo la definizione di limite superiore di una successione. Data una successione $\{g_n\}$ di numeri reali non negativi, limitata superiormente[1], si chiama *limite superiore* di $\{g_n\}$, e si indica con $\limsup_n g_n$, il limite

$$\limsup_n g_n \underset{\text{def}}{=} \lim_n M_n \tag{3}$$

dove

$$M_n = \sup\{g_n, g_{n+1}, g_{n+2}, \ldots\}.$$

Se invece la successione $\{g_n\}$ è illimitata (superiormente), si pone

$$\limsup_n g_n = \infty.$$

[1]Ricordiamo che una successione $\{g_n\}$ è limitata superiormente se esiste una costante k tale che $g_n < k$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Il massimo limite può essere, alternativamente, calcolato nel modo seguente. Sia $\{g_n\}$ limitata superiormente; essendo a termini non negativi, tale successione è limitata e quindi ammette sottosuccessioni convergenti. Si considerino allora tutte le possibili sottosuccessioni estraibili da $\{g_n\}$ e convergenti e sia I l'insieme formato da tutti i limiti di tali sottosuccessioni. Allora è possibile dimostrare che

$$\limsup_n g_n = \max I.$$

Se poi la successione $\{g_n\}$ è convergente, ovviamente si ha

$$\limsup_n g_n = \lim_n g_n.$$

Ad esempio, per la successione $\{g_n\}$ data da

$$g_n = \begin{cases} 1 + e^{-n} & n \text{ pari} \\ 3 + e^{-n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

si ha

$$\limsup_n g_n = 3.$$

Invece per la successione $\{g_n\}$ data da

$$g_n = \begin{cases} 1 + e^{n} & n \text{ pari} \\ 3 + e^{-n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

si ha

$$\limsup_n g_n = \infty.$$

Infine per la successione $\{g_n\}$ data da

$$g_n = 1 + e^{-n}$$

si ha

$$\limsup_n g_n = \lim_n g_n = 1.$$

Ciò premesso si ha il seguente

Teorema (di Cauchy-Hadamard) *Data la serie (1), sia ρ il suo raggio di convergenza. Allora*

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{4}$$

Ad esempio per la serie (2) si ha subito $\rho = 1$. Per la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \tag{5}$$

dove

$$a_n = \begin{cases} e^n & n \text{ pari} \\ e^{-n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

si ha facilmente $\rho = 1/e$.

Il raggio di convergenza può essere, talvolta, determinato in forma più agevole, mediante la seguente

Proposizione 1. *Sia ρ il raggio di convergenza di (1). Se il limite*

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \tag{6}$$

esiste finito, allora

$$\frac{1}{\rho} = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| . \tag{7}$$

Ad esempio per la serie

$$1 + s + \frac{s^2}{2^2} + \frac{s^3}{3^2} + \cdots + \frac{s^n}{n^2} + \cdots \tag{8}$$

si ha

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

e quindi $\rho = 1$.

La Proposizione 1 invece non è applicabile alla serie (5) in quanto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} e^{2n+1} & \text{se } n \text{ è pari} \\ e^{-2n-1} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

e quindi il limite (6) non esiste.

Per quanto concerne poi il comportamento della serie (1) sulla circonferenza di convergenza, possono presentarsi varie possibilità. La serie data può non convergere in nessun punto s tale che $|s| = \rho$: è questo, ad esempio, il caso della serie (2) per la quale si ha, come si è visto, $\rho = 1$ e

$$|s| = 1 \Rightarrow (2) \text{ non converge.}$$

Infatti sulla circonferenza di convergenza si ha $\lim_n |s^n| = 1$, mentre la convergenza di (2) implicherebbe $\lim_n |s^n| = 0$.
Altre serie, invece, convergono sull'intera circonferenza di convergenza, come, ad esempio, la serie (8) per la quale si ha, come si è visto, $\rho = 1$, ed inoltre

$$|s| = 1 \Rightarrow (8) \text{ converge.}$$

Altre serie infine convergono in alcuni punti della circonferenza di convergenza e non in altri, come, ad esempio, la serie

$$s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{s^{n+1}}{n+1} + \cdots \tag{9}$$

per la quale da (7) si ha subito $\rho = 1$ ed inoltre

$$\begin{aligned} s = 1 &\Rightarrow (9) \text{ converge} \\ s = -1 &\Rightarrow (9) \text{ non converge.} \end{aligned}$$

Come si è visto, la serie (1) converge assolutamente all'interno del cerchio di convergenza. Ricordiamo inoltre che (1) è uniformemente convergente in ogni insieme chiuso contenuto propriamente nel cerchio di convergenza. Più in generale è possibile dimostrare (Teorema di Abel) che se (1) converge in un punto P appartenente alla circonferenza di convergenza, allora (1) converge uniformemente in ogni settore circolare chiuso Ω di vertice P e contenuto nel cerchio di convergenza (vedi Figura 1).

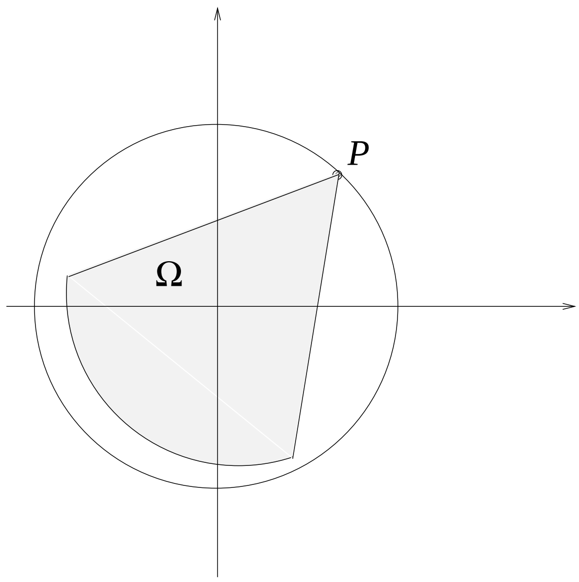

Figura 1. *Il cerchio di convergenza e il settore circolare* Ω

Ricordiamo infine che ogni serie di potenze è derivabile termine a termine all'interno del cerchio di convergenza, ossia la serie (1) e la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}$$

hanno lo stesso raggio di convergenza e

$$\frac{d}{ds}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}.$$

1.2 Definizione di Trasformata Zeta

Poniamo le seguenti definizioni:

DEF. Sia $\{f_n\}$ una successione di numeri, reali o complessi; si chiama **raggio di convergenza** di $\{f_n\}$, e si indica con R_f, il limite superiore[2]

$$\limsup_n \sqrt[n]{|f_n|} = R_f. \tag{10}$$

[2]Come al solito, con il simbolo $|f_n|$ si intende il valore assoluto oppure il modulo a seconda che f_n sia un numero reale o complesso.

Come richiamato nel precedente paragrafo, R_f è finito se e solo se la successione $\{\sqrt[n]{|f_n|}\}$ è limitata.

DEF. Sia $\{f_n\}$ una successione di numeri reali o complessi aventi raggio di convergenza R_f finito. Si chiama **trasformata Zeta di $\{f_n\}$** la funzione complessa F data da

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \tag{11}$$

dove z è un numero complesso tale che $|z| > R_f$.

La definizione ora data è ben posta, nel senso che la serie (11) è convergente in una opportuna regione del piano complesso. Infatti vale la seguente

Proposizione 2. *Sia $\{f_n\}$ una successione di numeri reali o complessi avente raggio di convergenza R_f finito. Allora la serie (11) converge per ogni numero complesso z esterno alla circonferenza di centro l'origine e raggio R_f.*

Effettuando infatti in (11) il cambiamento di variabile $s = 1/z$ si ottiene la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n \tag{12}$$

la quale, per i risultati richiamati nel precedente paragrafo, converge per ogni numero complesso s interno alla circonferenza di convergenza. Quest'ultima ha raggio ρ dato da $\rho = 1/R_f$ e pertanto (12) converge per ogni numero complesso s tale che $|s| < \frac{1}{R_f}$. Tenendo conto che $z = 1/s$ segue che (11) converge se $|z| > R_f$.

La trasformata Zeta è quindi una funzione (complessa di variabile complessa) definita in ogni punto esterno ad una opportuna circonferenza il cui raggio è dato da (10) (vedi Figura 2).

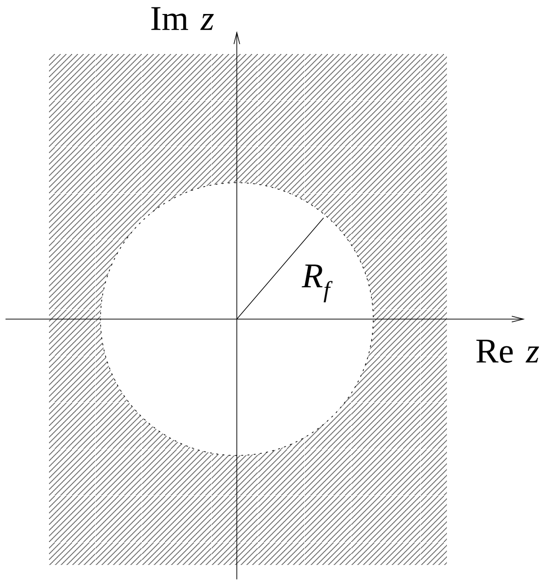

Figura 2. *Il piano z e il dominio della trasformata Zeta*

Essa pertanto è definita in un intorno di infinito. Scrivendo (11) per esteso si ottiene:

$$F(z) = f_0 + f_1 \frac{1}{z} + f_2 \frac{1}{z^2} + \cdots + f_n \frac{1}{z^n} + \cdots \tag{13}$$

e tale serie converge se $|z| > R_f$, $R_f < \infty$. Allora la trasformata Zeta non è altro che uno sviluppo in serie di Laurent all'infinito, sviluppo privo di parte principale in quanto in (13) non compaiono potenze di z ad esponente positivo[3]. Da ciò discende subito una prima proprietà per la trasformata Zeta. Vale infatti la seguente

Proposizione 3. *Sia $\{f_n\}$ una successione avente raggio di convergenza R_f finito. Allora la sua trasformata Zeta è analitica per ogni $z \in \mathbb{C}$, tale che $|z| > R_f$.*

Il raggio di convergenza è il minimo tra i raggi delle circonferenze tali che la trasformata Zeta è analitica al suo esterno. Vale infatti:

[3]Per tale motivo sarebbe stato più appropriato utilizzare per F il termine "*Trasformata di Laurent*". Si è affermato invece, in particolare in molti testi tecnici, il termine, anche qui usato, "*Trasformata Zeta*". Esso trae la sua origine dal nome impiegato per indicare la variabile da cui dipende F. Tale scelta è suggerita poi dall'opportunità di distinguere tale trasformata dalla trasformata di Laplace per la quale viene usata, in particolare nelle applicazioni di natura elettronica, la lettera s.

Teorema (Abel) *Sia $F(z)$ la trasformata Zeta di $\{f_n\}$, e sia $R_f > 0$ il suo raggio di convergenza. Allora F ha almeno una singolarità sulla circonferenza $|z| = R$.*

Il teorema di Abel permette quindi di determinare agevolmente il raggio di convergenza di una successione $\{f_n\}$ che sia z-trasformabile, nota la sua trasformata $F(z)$. È infatti sufficiente determinare le singolarità di F: il raggio di convergenza è il massimo tra i moduli delle singolarità di F.

Per quanto riguarda poi l'esistenza della trasformata, le successioni z-trasformabili sono quelle per le quali il raggio di convergenza è finito, ossia quelle la cui "crescita" è, al massimo, di tipo esponenziale. Vale infatti la seguente

Proposizione 4. *Sia $\{f_n\}$ una successione di numeri reali o complessi. Tale successione è z-trasformabile se e solo se esiste una costante positiva M tale che*

$$|f_n| \leq M^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Inoltre la trasformata Zeta è definita per ogni numero complesso z tale che $|z| > R_f$ dove R_f è dato da (10) oppure da

$$R_f = \lim_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right|$$

se quest'ultimo limite esiste.

Ad esempio la successione $\{f_n\}$ data da

$$f_n = \frac{1}{n!}$$

è z-trasformabile in quanto

$$|f_n| \leq 1.$$

Inoltre, poiché

$$\lim_n \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right| = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0$$

tale trasformata è definita sull'intero piano complesso, eccetto l'origine.
Invece la successione $\{g_n\}$ data da

$$g_n = n^n$$

non ammette trasformata Zeta, in quanto

$$\limsup_n \sqrt[n]{|g_n|} = \lim_n n = \infty.$$

Come si è visto, il raggio di convergenza è legato alla crescita della successione $\{f_n\}$. Ad esempio le successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ date, rispettivamente, da

$$\begin{aligned} a_n &= e^{-n} && n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= n && n = 0, 1, 2, \dots \\ c_n &= n^2 && n = 0, 1, 2, \dots \\ d_n &= 4^n && n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

sono tutte z-trasformabili, e si ha

$$\begin{aligned} R_a &= \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = e^{-1} \\ R_b &= \limsup_n \sqrt[n]{|b_n|} = 1 \\ R_c &= \limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} = 1 \\ R_d &= \limsup_n \sqrt[n]{|d_n|} = 4. \end{aligned}$$

Vale infine il seguente Teorema di caratterizzazione.

Teorema 1. *Sia F una funzione complessa di variabile complessa. Allora le seguenti quattro affermazioni sono equivalenti:*

1. *F è una trasformata Zeta;*
2. *$z = \infty$ è un punto di regolarità o una singolarità eliminabile per F;*
3. *F è sviluppabile in serie di Laurent all'infinito e lo sviluppo è privo di parte principale;*
4. *F è analitica per $|z|$ grande e $\lim_{z\to\infty} F(z)$ existe finito.*

Esercizio. Quale delle seguenti funzioni è una trasformata Zeta ?

$$F_1(z) = \sin z; \quad F_2(z) = \sin(1/z); \quad F_3(z) = 1/\sin z;$$
$$G_1(z) = \frac{z^2+1}{z^3+7}; \quad G_2(z) = \frac{z^4+1}{z^3+7}.$$

Risposta: lo sono F_2 e G_1, non lo sono le altre [F_1 ha una sing. essenziale all'infinito, F_3 ha in $s = \infty$ una sing. non isolata e G_2 un polo semplice].

1.3 Antitrasformata Zeta

In questo paragrafo esamineremo il problema dell'antitrasformata Zeta, per quanto concerne sia l'esistenza che il calcolo. Il problema dell'unicità è immediatamente risolto. Se infatti F è una trasformata Zeta, allora F è sviluppabile in serie di Laurent all'infinito. Poiché lo sviluppo in serie di Laurent è unico, necessariamente non può esistere più di una successione $\{f_n\}$ tale che $F(z) = Z\{f_n\}$. Per quanto concerne l'esistenza, il Teorema visto nel precedente paragrafo fornisce condizioni necessarie e sufficienti affinché una data funzione F complessa di variabile complessa sia una trasformata Zeta.

Vediamo ora alcuni esempi.

Esempio 1. Le funzioni F_1, F_2, date da

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{ze^z}{z^2+16} \\ F_2(z) &= \frac{1}{|z|+16} \end{aligned}$$

non sono trasformate Zeta.
Infatti le singolarità di F_1 sono $z = \pm 4j$ e $z = \infty$. La singolarità $z = \infty$ è essenziale e quindi la condizione 2. del Teorema 1 non è verificata.

Per quanto concerne la funzione F_2, essa è definita in tutto il piano complesso e si ha

$$\lim_{z\to\infty} F_2(z) = 0.$$

Tale funzione tuttavia non è analitica in nessun punto del piano complesso[4] e quindi non è sviluppabile in serie di Laurent, né al finito, né all'infinito.

Esempio 2. La funzione F data da

$$F(z) = \frac{ze^{1/z}}{z^2+4}$$

[4] Indicando infatti con u e v la parte reale e immaginaria di F_2, si ha ($z = x + jy$)

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+16}}, \qquad v(x,y) = 0$$

ed è immediato controllare che le formule di Cauchy-Riemann non sono soddisfatte.

è una trasformata Zeta.
Infatti le singolarità di F sono collocate nei punti

$$z = 0, \qquad z = \pm 2j.$$

Pertanto F è analitica per $|z| > 2$. Inoltre

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = 0$$

e quindi, per il Teorema 1, F è una trasformata Zeta, e $R_f = 2$.

Esempio 3. La funzione F_1 data da

$$F_1(z) = \frac{z^2 + 6}{z^2 + 9}$$

è una trasformata Zeta, mentre non lo è la funzione F_2 data da

$$F_2(z) = \frac{z^3 + 6}{z^2 + 9}.$$

Entrambe queste funzioni hanno due singolarità al finito, nei punti

$$z = \pm 3j.$$

Entrambe pertanto sono analitiche per $|z| > 3$. Sono quindi entrambe sviluppabili in serie di Laurent all'infinito. Tuttavia mentre lo sviluppo di F_1 è privo di parte principale, in quanto

$$\lim_{z \to \infty} F_1(z) = 1,$$

lo sviluppo di F_2 ha una parte principale non nulla poiché

$$\lim_{z \to \infty} F_2(z) = \infty.$$

Alla stessa conclusione si perviene osservando che $z = \infty$ è, per F_1, un punto di regolarità e per F_2 un polo (semplice).

Osservazione Se $F(z)$ è una funzione **razionale**, ovvero $F(z) = N(z)/D(z)$, N, D polinomi, allora vale la semplice caratterizzazione: F è una trasformata Zeta SSE $gr(N) \leq gr(D)$.

1.4 Calcolo dell'Antitrasformata

Ricordiamo preliminarmente che lo sviluppo in serie di Laurent all'infinito di una generica funzione complessa di variabile complessa g assume la forma

$$\begin{aligned} g(s) = \cdots + \frac{c_{-n}}{s^n} + \frac{c_{-n+1}}{s^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{s} \\ + c_0 + c_1 s + \cdots + c_n s^n + \cdots \end{aligned} \tag{15}$$

dove $|s|$ è sufficientemente grande e

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma \frac{g(s)}{s^{n+1}}\, ds \tag{16}$$

con Γ curva chiusa, semplice, regolare, percorsa in senso positivo (antiorario), contenente al proprio interno tutte le singolarità di g.

Ciò premesso, sia F una trasformata Zeta. Allora esiste una successione $\{f_n\}$ tale che per $|z|$ grande

$$F(z) = f_0 + f_1 \frac{1}{z} + f_2 \frac{1}{z^2} + \cdots . \tag{17}$$

Confrontando le formule (15) e (17) si ha allora

$$f_n = c_{-n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Pertanto, tenendo conto di (16), si ha

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma \frac{F(z)}{z^{-n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma F(z) z^{n-1}\, dz.$$

Tale espressione consente di determinare, nota la trasformata F, la successione $\{f_n\}$. Essa prende nome di formula dell'antitrasformata Zeta e scriveremo

$$Z^{-1}\{F(z)\} = f_n = \frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma F(z) z^{n-1}\, dz \tag{18}$$

dove, ricordiamolo, Γ rappresenta una curva chiusa, semplice, regolare, percorsa in senso positivo (antiorario) e contenente, al proprio interno, tutte le singolarità di F.

Pertanto il calcolo dell'antitrasformata è ricondotto al calcolo, per ogni $n \geq 0$, dell'integrale che figura a secondo membro di (18). Normalmente tale integrale sarà calcolato utilizzando la teoria dei Residui abbinando, in taluni casi, quest'ultima con la proprietà della convoluzione discreta, che vedremo in seguito.

Completiamo questo paragrafo illustrando altre tecniche che consentono, con un procedimento di ricorrenza, la determinazione della successione $\{f_n\}$.

Da (17) si ha subito

Teorema (del valore iniziale). *Sia $\{f_n\}$ una successione z-trasformabile. Allora, posto $Z\{f_n\} = F(z)$, si ha*

$$f_0 = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

Inoltre, sempre da (17) si ha

$$[F(z) - f_0]z = f_1 + f_2\frac{1}{z} + f_3\frac{1}{z^2} + \cdots$$

e quindi

$$f_1 = \lim_{z\to\infty}[F(z) - f_0]z.$$

Procedendo in maniera simile si ha poi

$$f_2 = \lim_{z\to\infty}[F(z) - f_0 - f_1\frac{1}{z}]z^2$$

e così via. Tale procedimento consente quindi di determinare, uno dopo l'altro, tutti i valori del campionamento $\{f_n\}$.

Un'altra possibilità, per quanto riguarda il calcolo dell'antitrasformata, è poi la seguente. Effettuiamo in (17) il cambio di variabile $z = 1/u$: si ottiene allora per $|u|$ piccolo

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = f_0 + f_1u + f_2u^2 + \cdots .$$

Essendo quest'ultima una serie di Taylor di centro $u = 0$ si ha allora

$$f_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{du^n}G(u)\bigg|_{u=0}$$

dove $G(u) = F(1/u)$.

Esempio 4. Calcolare l'antitrasformata Zeta della funzione F data da

$$F(z) = \frac{1}{z^2 - 4}.$$

La funzione F è una trasformata Zeta in quanto è analitica per $|z| > 2$ e $\lim_{z\to\infty} F(z) = 0$. Dalla formula (18) si ha allora

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{z^{n-1}}{z^2 - 4}\, dz \tag{19}$$

dove C è una circonferenza, percorsa in senso positivo, di centro l'origine e raggio $R > 2$. Le singolarità della funzione integranda sono $z = \pm 2$ ed inoltre $z = 0$ quando $n = 0$. D'altra parte il coefficiente f_0 può essere calcolato tramite il teorema del valore iniziale, ottenendo

$$f_0 = 0.$$

Per $n \geq 1$, applicando in (19) il Teorema dei Residui, si ha

$$f_n = \mathrm{Res}\left[\frac{z^{n-1}}{z^2-4},\, 2\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{z^{n-1}}{z^2-4},\, -2\right].$$

Essendo $z = \pm 2$ poli semplici, si ha allora

$$f_n = \left.\frac{z^{n-1}}{2z}\right|_{z=2} + \left.\frac{z^{n-1}}{2z}\right|_{z=-2} = 2^{n-3} - (-2)^{n-3} = 2^{n-3}(1 + (-1)^n).$$

In conclusione:

$$f_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 2^{n-2} & n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ 0 & n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Esempio 5. Calcolare l'antitrasformata Zeta della funzione F data da

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 4}.$$

Per il Teorema 1, F è una trasformata Zeta. Applicando la formula (18) si ha

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{z^n}{z^2 + 4}\, dz$$

dove C è una circonferenza, percorsa in senso positivo, di centro l'origine e raggio $R > 2$. Le singolarità della funzione integranda sono $z = \pm 2j$ e sono due poli semplici. Applicando allora il Teorema dei Residui si ha

$$f_n = \left.\frac{z^n}{2z}\right|_{z=2j} + \left.\frac{z^n}{2z}\right|_{z=-2j} = \frac{(2j)^{n-1}}{2} + \frac{(-2j)^{n-1}}{2}.$$

Poiché $j = e^{j\pi/2}$, con facili calcoli si ottiene

$$f_n = 2^{n-1} \cos\left[\frac{\pi}{2}(n-1)\right] = \begin{cases} (-1)^k 2^{2k} & n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Osservazione. Sia $F(z)$ una trasformata Zeta. Se $z = \infty$ è una zero di ordine $N \geq 1$ per F, allora detta $\{f_n\}$ l'antitrasformata Zeta di F, risulta:

$$f_0 = f_1 = \ldots = f_{N-1} = 0, \ f_N \neq 0.$$

Infatti: $F(z) = f_N/z^N + f_{N+1}/z^{N+1} + \ldots$, con $f_N \neq 0$.

1.5 Prime proprietà

In questo paragrafo presentiamo alcune proprietà della trasformata Zeta. Le dimostrazioni di queste proprietà sono alla fine del paragrafo.

Proposizione 5 (Linearità). *Siano $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ due successioni z-trasformabili e siano c_1, c_2 due costanti complesse. Allora la successione $\{h_n\}$ data da*

$$h_n = c_1 f_n + c_2 g_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

è z-trasformabile e

$$Z\{h_n\} = c_1 Z\{f_n\} + c_2 Z\{g_n\}. \tag{20}$$

Si osservi che l'ipotesi "le successioni $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ sono z-trasformabili" non può, in generale, essere sostituita da "la successione $\{h_n\}$ è z-trasformabile". Ad esempio sia $c_1 = c_2 = 1$ e

$$\begin{cases} f_0 = g_0 = 0 \\ f_n = -g_n = n^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Allora $h_n = f_n + g_n = 0$; quindi $\{h_n\}$ è z-trasformabile. Tuttavia le successioni $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ non ammettono trasformata Zeta e quindi (20) non vale.

Proposizione 6 (Proprietà dello smorzamento). *Sia $\{f_n\}$ una successione z-trasformabile e sia $F(z) = Z\{f_n\}$. Fissato un numero ω, reale o complesso, la successione $\{g_n\}$ data da*

$$g_n = f_n e^{\omega n}$$

è z-trasformabile e si ha

$$R_g = R_f e^{\mathrm{Re}\,\omega} \tag{21}$$

$$Z\{g_n\} = F(e^{-\omega} z) \tag{22}$$

Proposizione 7 (Proprietà della moltiplicazione per $\boldsymbol{n}$). *Sia $\{f_n\}$ una successione z-trasformabile e sia $F(z) = Z\{f_n\}$. Allora la successione $\{g_n\}$ data da*

$$g_n = n f_n$$

è z-trasformabile e si ha

$$R_g = R_f \tag{23}$$

$$Z\{g_n\} = -z \frac{d}{dz} F(z). \tag{24}$$

Dimostrazione Proposizione 5. Essendo $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ due successioni z-trasformabili, esistono due costanti positive M_f e M_g, tali che

$$|f_n| \leq M_f^n, \qquad |g_n| \leq M_g^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Posto $M = \max(M_f,\, M_g)$ si ha allora

$$|h_n| \leq (|c_1| + |c_2|) M^n$$

e quindi $\{h_n\}$ è z-trasformabile. L'identità (20) segue da una proprietà generale delle serie[5].

Dimostrazione Proposizione 6. Per la Proposizione 4, esiste una costante positiva M tale che

$$|f_n| \leq M^n;$$

[5]Ricordiamo che se le due serie numeriche

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

allora

$$|g_n| = |f_n| e^{n \operatorname{Re} \omega} \leq \left(M e^{\operatorname{Re} \omega} \right)^n \tag{25}$$

e quindi, $\{g_n\}$ è z-trasformabile. Inoltre da (25) si ha

$$\sqrt[n]{|g_n|} = e^{\operatorname{Re} \omega} \sqrt[n]{|f_n|}$$

e quindi (21) è verificata. Ponendo

$$s = e^{-\omega} z$$

si ha poi

$$\begin{aligned} Z\{g_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{\omega n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(e^{-\omega} z \right)^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^{-n} = F(s) \end{aligned}$$

e quindi anche (22) è verificata.

Dimostrazione Proposizione 7. Avendosi

$$\limsup_n \sqrt[n]{|g_n|} = \limsup_n \left(\sqrt[n]{n} \right) \sqrt[n]{|f_n|} = \limsup_n \sqrt[n]{|f_n|}$$

ne segue che $\{g_n\}$ è z-trasformabile e che (23) è verificata.

Essendo poi la trasformata Zeta una serie di potenze, è lecito derivare termine a termine; si ha pertanto

$$\frac{d}{dz} F(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} n f_n z^{-n-1}$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per $-z$, si ottiene subito (23).

---

sono assolutamente convergenti, allora lo è anche la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

e si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

2 Campionamenti Elementari

Utilizzando la definizione e le proprietà viste nel Paragrafo precedente calcoliamo la trasformata Zeta di alcune successioni ottenute campionando funzioni elementari.

2.1 Campionamento costante

Sia

$$f_n = 1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Allora $R_f = 1$ e per $|z| > 1$ si ha

$$F(z) = Z\{1\} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}}_{(*)} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

in quanto $(*)$ è una serie geometrica di ragione $1/z$.

2.2 Campionamento lineare

Sia

$$f_n = n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Allora $f_n = n \cdot 1$ e utilizzando la proprietà della moltiplicazione per n (Proposizione 7), si ottiene per $|z| > 1$

$$Z\{n\} = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

2.3 Campionamento polinomiale

Sia

$$f_n = n^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Procedendo come nel caso precedente, si ottiene per $|z| > 1$

$$Z\{n^2\} = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2 + z}{(z-1)^3}.$$

Analogamente si ha per $|z| > 1$

$$Z\{n^3\} = -z\frac{d}{dz}\frac{z^2 + z}{(z-1)^3} = \frac{z^3 + 4z^2 + z}{(z-1)^4}$$

e così via.

2.4 Campionamento esponenziale

Sia

$$f_n = e^{Tn}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

dove T è un fissato numero reale o complesso. Allora

$$\sqrt[n]{|f_n|} = |e^T| = e^{\mathrm{Re}\, T}.$$

Pertanto $R_f = e^{\mathrm{Re}\, T}$. Per $z > e^{\mathrm{Re}\, T}$, dalla proprietà dello smorzamento (Proposizione 6) si ottiene

$$Z\{e^{Tn}\} = Z\{e^{Tn} \cdot 1\} = \frac{e^{-T}z}{e^{-T}z - 1} = \frac{z}{z - e^T}.$$

2.5 Campionamenti trigonometrici

Sia

$$f_n = \sin(\omega n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

dove ω è un numero reale fissato. Utilizzando le formule di Eulero e la proprietà dello smorzamento, si ottiene facilmente per $|z| > 1$

$$Z\{\sin(\omega n)\} = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}.$$

Similmente si ha

$$Z\{\cos(\omega n)\} = \frac{z(z - \cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}.$$

Esempio 6. Calcolare la trasformata Zeta della successione $\{f_n\}$ data da

$$f_n = ne^{3n}\sin n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Poiché per $|z| > 1$

$$Z\{\sin n\} = \frac{z \sin 1}{z^2 - 2z \cos 1 + 1}$$

per la proprietà dello smorzamento, la successione $\{e^{3n} \sin n\}$ ha raggio di convergenza e^3 e si ha

$$Z\{e^{3n} \sin n\} = \frac{e^{-3} z \sin 1}{e^{-6} z^2 - 2e^{-3} z \cos 1 + 1}.$$

Dal Teorema della moltiplicazione per n si ha infine

$$Z\{f_n\} = -z \frac{d}{dz} \frac{e^{-3} z \sin 1}{e^{-6} z^2 - 2e^{-3} z \cos 1 + 1}.$$

2.6 La Proprietà della Traslazione

Poniamo la seguente

Def. Sia p un intero positivo fissato. Data la successione

$$\{f_n\} =: f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots$$

si chiama **successione traslata in avanti di p-passi**, o semplicemente **successione traslata**, la successione

$$\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0,}_{p \text{ volte}} f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots$$

In altre parole la successione traslata in avanti di p-passi è la successione ottenuta da $\{f_n\}$ inserendo nei primi p posti il valore zero. Tale successione sarà indicata con il simbolo $\{f_{n-p}\}$. Così, ad esempio,

$$f_{n-3} =: 0, 0, 0, f_0, f_1, \ldots$$

Il motivo del nome è evidente. Se $\{f_n\}$ rappresenta infatti il campionamento di una funzione f, nulla per $t < 0$, negli istanti $t_n = nT$, allora $\{f_{n-p}\}$ è il campionamento della funzione traslata $f(t - pT)$ negli stessi istanti. Si ha pertanto

$$f_{n-p} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < p \\ f_{n-p} & \text{se } n \geq p. \end{cases} \tag{26}$$

Ciò posto, vale la seguente

Proposizione 8 (Proprietà della traslazione). *Sia $\{f_n\}$ una successione z-trasformabile. Allora anche la successione traslata $\{f_{n-p}\}$ è z-trasformabile, ha lo stesso raggio di convergenza ed inoltre*

$$Z\{f_{n-p}\} = z^{-p} Z\{f_n\}.$$

Infatti, dalla definizione di limite superiore, segue subito che $\{f_n\}$ e $\{f_{n-p}\}$ hanno stesso raggio di convergenza. Inoltre, tenendo conto di (26), si ha

$$Z\{f_{n-p}\} = \sum_{n=p}^{\infty} f_{n-p} z^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i-p} = z^{-p} \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i}.$$

Esempio 7. Calcolare la trasformata Zeta della successione $\{f_n\}$ data da

$$f_n = \begin{cases} e^{4n} & n \geq 4 \\ 0 & n = 0, 1, 2, 3. \end{cases}$$

Si ha evidentemente

$$f_n = g_{n-4}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

dove $\{g_n\}$ è la successione data da

$$g_n = e^{16+4n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Pertanto

$$Z\{g_n\} = \frac{e^{16} z}{z - e^4}$$

e quindi

$$Z\{f_n\} = \frac{e^{16}}{z^3(z - e^4)}.$$

2.7 La Convoluzione Discreta

Poniamo la seguente

Def. Siano $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ due successioni. Si chiama **convoluzione discreta** tra le due successioni $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$, la successione $\{h_n\}$ data da

$$h_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{27}$$

La convoluzione discreta sarà indicata con il simbolo $\{f_n * g_n\}$.

Il motivo del nome è, anche in questo caso, evidente. Siano infatti f, g due funzioni nulle per $t < 0$ e sufficientemente regolari; siano poi $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ i campionamenti di tali funzioni negli istanti $t_n = nT$. Ricordiamo che il prodotto di convoluzione $f * g$ è la funzione data da

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau. \tag{28}$$

Poiché la sommatoria in (27) è la forma discretizzata dell'integrale che compare in (28), è naturale indicare (27) con l'espressione "convoluzione discreta".

Valgono le proprietà:

$$\begin{aligned} \{f_n * g_n\} &= \{g_n * f_n\} \\ \{f_n * (g_n^1 + g_n^2)\} &= \{f_n * g_n^1 + f_n * g_n^2\}. \end{aligned}$$

Il seguente risultato illustra una importante proprietà della convoluzione discreta.

Teorema *Siano $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ due successioni z-trasformabili. Allora anche la convoluzione discreta $\{h_n\} = \{f_n * g_n\}$ è z-trasformabile e il suo raggio di convergenza R_h verifica la disuguaglianza*

$$R_h \leq \max(R_f,\, R_g) \tag{29}$$

dove R_f e R_g indicano, rispettivamente, i raggi di convergenza di $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$. Inoltre si ha

$$Z\{h_n\} = Z\{f_n\}Z\{g_n\}. \tag{30}$$

Esempio 8. Calcolare la trasformata Zeta della successione $\{h_n\}$ data da

$$h_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Evidentemente si ha

$$h_n = f_n * g_n$$

dove

$$\begin{cases} f_n = n \\ g_n = 1 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Allora

$$Z\{h_n\} = Z\{n\}Z\{1\} = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

Osserviamo che la disuguaglianza (29) può valere anche in senso stretto. Ad esempio svolgere il seguente esercizio.

Esercizio. Si considerino le due successioni $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ date rispettivamente da

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 1 - e & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$g_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ e^{n-1}(e-1) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Dopo avere determinato il raggio di convergenza delle rispettive trasformate Zeta, si scriva esplicitamente la loro convoluzione discreta $h_n = f_n * g_n$ e si provi che, in questo caso, vale $R_h < \max(R_f,\, R_g)$.

Il Teorema della convoluzione discreta ha alcune semplici ma importanti conseguenze.

Corollario 1. *Se $F(z)$ è la trasformata Zeta di $\{f_n\}$, allora*

$$Z\left\{\sum_{k=0}^{n} f_k\right\} = \frac{z}{z-1}F(z).$$

Corollario 2. *Se $F(z)$, $G(z)$ sono le trasformate Zeta di $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$, rispettivamente, allora l'antitrasformata Zeta di $F(z)H(z)$ è la convoluzione discreta $\{f_n * g_n\}$.*

Una applicazione importante del Corollario 2 è il calcolo dell'antitrasformata Zeta nel caso non razionale.

Esempio 9. Calcolare l'antitrasformata Zeta della funzione H data da

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - 4}\, e^{1/z}.$$

La funzione H è una trasformata Zeta in quanto è analitica per $|z| > 2$ e $\lim_{z\to\infty} H(z) = 0$. Da (17) si ha allora

$$h_0 = \lim_{z\to\infty} H(z) = 0.$$

Per quanto riguarda i restanti coefficienti h_n si ha, da (18),

$$h_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_R} \frac{z^{n-1}}{z^2 - 4} \, e^{1/z} \, dz \tag{31}$$

dove C_R è una circonferenza di centro l'origine, percorsa in senso positivo e di raggio $R > 2$. Applicando il Teorema dei Residui a (31) si ottiene ($n \geq 1$)

$$\begin{aligned} h_n = & \underbrace{\mathrm{Res}\left[\frac{z^{n-1}}{z^2 - 4}\, e^{1/z},\, 0\right]}_{(*)} + \mathrm{Res}\left[\frac{z^{n-1}}{z^2 - 4}\, e^{1/z},\, 2\right] \\ & + \mathrm{Res}\left[\frac{z^{n-1}}{z^2 - 4}\, e^{1/z},\, -2\right]. \end{aligned}$$

Il calcolo del primo residuo $(*)$ presenta notevoli difficoltà in quanto $z = 0$ è una singolarità essenziale. Il calcolo dell'antitrasformata di H può essere affrontato in altro modo osservando che H è il prodotto di due funzioni F e G, date rispettivamente da

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{z^2 - 4} \\ G(z) &= e^{1/z}. \end{aligned}$$

Per il Teorema 1 sia F che G sono, a loro volta, due trasformate Zeta. Posto allora

$$Z^{-1}\{F(z)\} = f_n, \qquad Z^{-1}\{G(z)\} = g_n,$$

avendosi

$$H(z) = F(z)G(z)$$

dalla proprietà della convoluzione discreta si ha

$$h_n = f_n * g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}.$$

Il problema è pertanto ricondotto al calcolo delle antitrasformate di F e di G. L'antitrasformata della funzione razionale F è stata calcolata nell'Esempio 4. Per quanto riguarda poi G, è sufficiente ricordare la definizione di esponenziale in campo complesso

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \cdots \quad (z \neq 0).$$

Pertanto
$$g_n = \frac{1}{n!}.$$

Esempio 10. Calcolare l'antitrasformata Zeta della funzione H data da
$$H(z) = \frac{z \sin \frac{1}{3z}}{z^2 + 4}.$$

La funzione H è una trasformata Zeta in quanto è analitica per $|z| > 2$ e $\lim_{z\to\infty} H(z) = 0$. Essendo H non razionale, procediamo come nell'esempio precedente. La funzione H è infatti il prodotto delle due funzioni F e G date da
$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 4}$$
$$G(z) = \sin \frac{1}{3z},$$

la prima delle quali è razionale. Entrambe tali funzioni sono, per il Teorema 1, trasformate Zeta. L'antitrasformata $\{f_n\}$ della funzione F è stata calcolata nell'Esempio 5. Per quanto riguarda G si ha ($z \neq 0$)
$$\sin \frac{1}{3z} = \frac{1}{3}\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{3^3}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{3^5}\frac{1}{z^5} + \cdots .$$

Pertanto, posto
$$g_n = Z^{-1}\{G(z)\}$$

si ha
$$\begin{cases} g_n = 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ g_{2n+1} = (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)!}\dfrac{1}{3^{2n+1}}. \end{cases}$$

L'antitrasformata cercata $\{h_n\}$ si ottiene allora effettuando la convoluzione discreta tra le due successioni $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$.

2.8 Il Teorema del Valore Finale

Analogamente al Teorema del Valore Iniziale, già visto, che dà una relazione tra il comportamento della trasformata Zeta all'infinito e il termine iniziale

f_0 del campionamento, in alcuni casi sussiste anche una relazione tra il comportamento all'infinito del campionamento e il valore della trasformata in un punto. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema (del valore finale). *Sia $\{f_n\}$ una successione convergente esponenzialmente*[6]*. Allora $\{f_n\}$ ammette trasformata Zeta e, posto $Z\{f_n\} = F(z)$, si ha*

$$\lim_n f_n = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z) \tag{32}$$

dove il limite a secondo membro è inteso nel senso che il numero complesso z tende a 1 restando all'esterno del cerchio di centro l'origine e raggio unitario.

Si osservi che la successione $\{f_n\}$ ammette trasformata Zeta in quanto, essendo convergente, è limitata e dunque $R_f \leq 1$. Pertanto il dominio della trasformata o contiene al proprio interno il punto $z = 1$ (nel caso in cui $R_f < 1$) o ha il punto $z = 1$ come punto di accumulazione. In entrambi i casi quindi è lecito calcolare il limite a secondo membro di (32).

In particolare, se $\lim_n f_n = l \neq 0$, allora (32) diviene

$$\lim_{z\to 1}(z-1)F(z) = l \neq 0.$$

Tenendo conto allora della definizione di Residuo, ne segue che F ha necessariamente un polo semplice in $z = 1$.

Notare Bene. Il Teorema del valore finale richiede, implicitamente, che il raggio di convergenza R_f di $\{f_n\}$ sia minore o uguale ad 1. Pertanto se $R_f > 1$, allora tale Teorema non può essere applicato. Questo è il caso, ad esempio, della funzione

$$F(z) = \frac{2(z+3)}{2z^2 - 13z + 6}.$$

Tale funzione è una trasformata Zeta. Essendo $z = 1/2$ e $z = 6$ due poli semplici, F è analitica per $|z| > 6$. Allora $R_f = 6$ e il Teorema del valore finale non può essere applicato.

[6] Ricordiamo che una successione $\{f_n\}$ converge esponenzialmente a l se $\{f_n\}$ converge ad l ed inoltre esistono due costanti positive k, γ tali che per ogni n sufficientemente grande si abbia

$$|f_n - l| \leq ke^{-\gamma n}$$

2.9 Applicazioni della Trasformata Zeta - Equazioni alle differenze - Teorema del campionamento

Il recente sviluppo della tecnologia nel settore degli elaboratori digitali ha favorito l'impiego di modelli discreti nello studio di numerosi problemi fisici, ossia di modelli nei quali le grandezze coinvolte sono note non per **ogni** valore delle variabili, ma soltanto per un insieme discreto di tali valori[7].

Spesso tali modelli hanno, come legge di equilibrio, equazioni, o sistemi di equazioni, alle differenze. Oltre ai metodi classici impiegati per la loro risoluzione (metodo "matriciale", metodo di "ricorrenza", ecc.), in molti casi un approccio particolarmente efficace è dato dal metodo della trasformata Zeta. Il vantaggio di tale algoritmo consiste nel fatto che esso riconduce la risolubilità delle equazioni considerate a quella di opportune equazioni algebriche. In questo senso quindi svolge una funzione molto simile a quella svolta dalla trasformata di Laplace nel caso di sistemi tempo-continui, ossia di sistemi modellati da equazioni o sistemi di equazioni differenziali.

Si consideri, ad esempio, la rete RL in Figura 3 e siano rispettivamente R, L i valori della resistenza e dell'induttanza. Sia poi v la f.e.m. applicata e i la corrente che percorre il circuito. La legge di equilibrio del circuito analogico è data dall'equazione differenziale lineare

$$L\frac{d}{dt}i(t) + Ri = v(t). \tag{33}$$

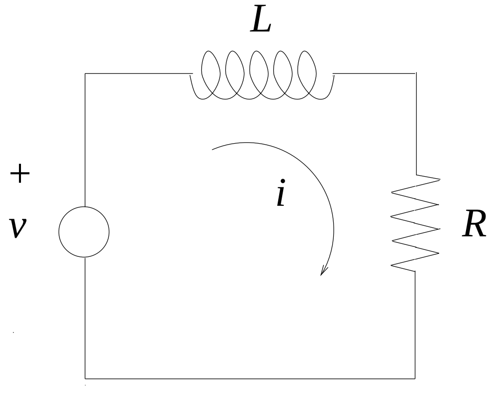

Figura 3. *Circuito RL-serie*

[7]Nell'ambito dell'elettronica le grandezze definite per ogni valore della variabile temporale t sono chiamate *analogiche*: le grandezze definite invece solo per valori discreti di t sono dette *digitali*.

Sia ΔT un intervallo di tempo sufficientemente piccolo; approssimando la derivata di/dt nell'istante $t_n = n\Delta T$ con il rapporto incrementale "all'indietro"

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{n\Delta T} \approx \frac{i(n\Delta T) - i(n\Delta T - \Delta T)}{\Delta T},$$

da (33) si ottiene

$$L\,\frac{i(t_n) - i(t_{n-1})}{\Delta T} + Ri(t_n) \approx v(t_n)$$

ossia

$$i(t_n) - \frac{L}{L + R\Delta T}\,i(t_{n-1}) \approx \frac{\Delta T}{L + R\Delta T} v(t_n). \tag{34}$$

Posto $i_n = i(t_n)$, $v_n = v(t_n)$, (34) assume la forma

$$i_n - \frac{L}{L + R\Delta T}\,i_{n-1} \approx \frac{\Delta T}{L + R\Delta T} v_n$$

che è un'equazione alle differenze del primo ordine. Assegnata la sequenza di ingresso $\{v_n\}$, è possibile risolvere tale equazione (i.e. determinare la sequenza "di uscita" $\{i_n\}$) utilizzando varie tecniche, tra cui il metodo della trasformata Zeta. Osservando che l'equazione (34) è del tipo:

$$i_n - Ai_{n-1} = Bv_n,$$

con A, B costanti note e $\{v_n\}$ successione assegnata, possiamo applicare la trasformata Zeta ad entrambi i membri, assumendo che $\{i_n\}$ e $\{v_n\}$ siano z-trasformabili. Posto $I(z) = Z\{i_n\}$ e $V(z) = Z\{v_n\}$ risulta

$$I(z) - \frac{A}{z}I(z) = BV(z),$$

da cui

$$I(z) = \frac{BzV(z)}{z - A},$$

e antitrasformando si determina la sequenza in uscita $\{i_n\}$.

La trasformata Zeta trova un largo impiego non solo nella simulazione di reti elettriche tramite modelli digitali, ma anche in numerosi altri problemi. Fra essi, di particolare importanza sono quelli connessi con la trasmissione e l'elaborazione di segnali digitali. Ricordiamo in proposito che, data una funzione φ (reale o complessa) di variabile reale, si chiama *funzione campionata* o *campionamento (di φ)*, la successione

$$\{\varphi_n\} = \{\varphi(nT)\}$$

ottenuta campionando la funzione φ in una successione di istanti equispaziati $t_n = nT$. L'ampiezza di tali intervalli prende il nome di *intervallo di campionamento.*

Le funzioni campionate sono ampiamente utilizzate nelle telecomunicazioni per i vantaggi che il loro utilizzo comporta e, in questo ambito, la trasformata Zeta si rivela un valido strumento matematico. Una proprietà di fondamentale importanza delle funzioni campionate è descritta dal seguente teorema.

Teorema (del campionamento). *Sia f una funzione trasformabile secondo Fourier e sia F la sua trasformata. Siano inoltre f e F sviluppabili in serie di Fourier in $[-L, L]$, per ogni $L > 0$. Supponiamo infine che F sia a supporto compatto, ossia che esista una costante $B > 0$ tale che*

$$F(\omega) = 0 \qquad \text{se } |\omega| > 2\pi B.$$

Sotto queste ipotesi, vale la seguente formula

$$f(t) = \frac{T}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t - nT)\right]}{t - nT} \tag{35}$$

dove $T = 1/(2B)$.

L'importanza di tale risultato è evidente. Infatti da (35) ne segue che la funzione f è nota non appena siano noti i valori $f(nT)$ che tale funzione assume negli istanti nT. In altre parole, è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra le funzioni verificanti le ipotesi del Teorema e un loro campionamento, effettuato in istanti di tempo equispaziati. Nell'ambito delle telecomunicazioni, tale corrispondenza biunivoca è di notevole importanza, in quanto consente la trasmissione di segnali in forma campionata, senza "perdita di informazioni" e la formula (35) permette di ricostruire il segnale da un suo campionamento. A ciò si aggiunga il fatto che la trasmissione di segnali in forma campionata è molto più agevole di quella di segnali analogici. Nel Teorema precedente l'ipotesi "cruciale" è la seguente

$$F(\omega) = 0 \qquad \text{per } |\omega| \geq 2\pi B.$$

In altre parole la corrispondenza biunivoca tra segnali e loro campionamenti necessita della condizione che f deve avere spettro nullo al di fuori della banda di pulsazioni $[-2\pi B, 2\pi B]$.

La trasformata Zeta viene utilizzata anche in altre applicazioni, di natura ingegneristica e non. Esempi in tal senso si trovano nello studio di processi di controllo, nell'impiego di filtri digitali, nella teoria delle antenne, nell'analisi di reti a scala, in svariati problemi di ottimizzazione, in questioni di economia, ecc. La trasformata Zeta interviene inoltre anche nella risolubilità di alcune classi di equazioni differenziali alle differenze, che modellano problemi fisici in cui sono presenti elementi con memoria. Per tutte queste applicazioni, rinviamo ai corsi relativi.

2.10 Esempi ed esercizi

Esempio 11. Calcolare la trasformata Zeta della successione $\{f_n\}$ data da

$$f_n = \begin{cases} ne^{-n} & \text{se } n = 0, 2, 4, \dots \\ 0 & \text{se } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \tag{36}$$

Calcoliamo il raggio di convergenza R_f. Avendosi

$$\sqrt[n]{|f_n|} = \begin{cases} e^{-1}\sqrt[n]{n} & n > 0, \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

da (10) si ha $R_f = e^{-1}$.

Applicando la definizione e osservando che tutti i termini di posto dispari sono nulli, si ha

$$\begin{aligned} Z\{f_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} z^{-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2ke^{-2k} z^{-2k}. \end{aligned}$$

Ponendo $w = z^2$ si ottiene

$$Z\{f_n\} = 2\sum_{k=0}^{\infty} ke^{-2k}w^{-k}.$$

Ci siamo perciò ricondotti al calcolo della trasformata Zeta della successione $\{ke^{-2k}\}$. Avendosi, per $|w| > 1$,

$$Z\{k\} = \frac{w}{(w-1)^2}$$

applicando la proprietà dello smorzamento si ha

$$Z\{ke^{-2k}\} = \frac{we^2}{(e^2w-1)^2}, \qquad \text{se } |w| > e^{-2}$$

da cui infine

$$Z\{f_n\} = 2\frac{z^2e^2}{(e^2z^2-1)^2} \tag{37}$$

con $|z| > e^{-1}$, in accordo con il valore di R_f ottenuto prima.

La trasformata Zeta della successione (36) può essere calcolata anche con altre tecniche. Ad esempio considerando la successione ausiliaria $\{h_n\}$ data da

$$h_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Introdotta tale successione, si ha

$$f_n = ne^{-n}h_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

e quindi il problema è, in definitiva, ricondotto al calcolo della trasformata di $\{h_n\}$. Si ha

$$\begin{aligned} Z\{h_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \cdots \\ &= \frac{1}{1-z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-1} \qquad \text{se } |z| > 1. \end{aligned}$$

Applicando le proprietà dello smorzamento e della moltiplicazione per n (l'ordine è indifferente) si ha infine ($|z| > e^{-1}$)

$$Z\{f_n\} = Z\{ne^{-n}h_n\} = -z\,\frac{d}{dz}\,\frac{(ze)^2}{z^2e^2-1}$$

da cui la (37).

Esempio 12. Calcolare la trasformata Zeta della successione $\{f_n\}$ data da

$$f_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ è pari, } n \neq 8 \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ e & \text{se } n = 8. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il raggio di convergenza, si ha facilmente $R_f = 1$. Per quanto riguarda il calcolo di $Z\{f_n\}$, la successione $\{f_n\}$ può essere pensata come somma di due successioni $\{g_n\}$ e $\{h_n\}$ date rispettivamente da

$$g_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$h_n = \begin{cases} -8 + e & \text{se } n = 8 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Infatti si ha

$$f_n = g_n + h_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Il calcolo della trasformata è quindi ricondotto al calcolo delle due trasformate $Z\{g_n\}$, $Z\{h_n\}$. Dalla definizione si ha subito

$$Z\{h_n\} = \frac{-8 + e}{z^8}.$$

Inoltre

$$Z\{g_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} 2k z^{-2k} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-2k}.$$

Ponendo allora $w = z^2$ e applicando la proprietà della moltiplicazione per n, si ha

$$\begin{aligned} Z\{g_n\} &= 2 \sum_k k w^{-k} = -2w \frac{d}{dw} \frac{w}{w-1} \\ &= \frac{2w}{(w-1)^2}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$Z\{f_n\} = \frac{2z^2}{(z^2-1)^2} + \frac{-8 + e}{z^8}.$$

Si osservi che il cambiamento di variabile $w = z^2$ è suggerito dal successivo impiego della proprietà della moltiplicazione per n. Si faccia attenzione infatti che

$$2\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-2k}$$

non è uguale a

$$-2z\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k}.$$

Esempio 13. Calcolare la trasformata Zeta della successione $\{f_n\}$ data da

$$f_n = \begin{cases} e^n & \text{se } n = 0, 4, 8, 12, \ldots \\ n & \text{se } n = 1, 3, 5, 7, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per quanto riguarda il raggio di convergenza, avendosi

$$\sqrt[n]{|f_n|} = \begin{cases} e & \text{se } n = 4, 8, 12, \ldots \\ \sqrt[n]{n} & \text{se } n = 1, 3, 5, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

da (10) si ha subito $R_f = e$. Inoltre

$$Z\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{4k} z^{-4k} + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) z^{-2k-1}$$

pertanto

$$Z\{f_n\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{4k} z^{-4k} + 2z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-2k} + z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k}.$$

Ponendo $w = z^4$ nella prima sommatoria e $v = z^2$ nella seconda e nella terza si ha

$$Z\{f_n\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{4k} w^{-k} + 2z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} kv^{-k} + z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} v^{-k}$$

ossia

$$Z\{f_n\} = \frac{w}{w - e^4} + 2z^{-1}\frac{v}{(v-1)^2} + z^{-1}\frac{v}{v-1}$$

da cui

$$Z\{f_n\} = \frac{z^4}{z^4 - e^4} + \frac{z^3 + z}{(z^2-1)^2}.$$

Esercizi.

Calcolare la trasformata Zeta dei seguenti campionamenti, determinando anche il raggio di convergenza.

$$f_n = ne^{\gamma n},\ \gamma \in \mathbb{C} \qquad : \qquad F(z) = \frac{ze^{\gamma}}{(z - e^{\gamma})^2}$$

$$f_n = (-1)^n ne^{-6n} \qquad : \qquad F(z) = \frac{-ze^6}{(ze^6 + 1)^2}$$

$$f_n = ne^{7n}\sin(4n) \qquad : \qquad F(z) = \frac{ze^7 \sin 4(z^2 - e^{14})}{(z^2 - 2ze^7\cos 4 + e^{14})^2}$$

$$f_n = (-1)^n e^{2n}\sin(3n)$$

$$f_n = \begin{cases} 4n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \qquad : \qquad F(z) = \frac{8z^2}{(z^2-1)^2};$$

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ e^{3n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \qquad : \qquad F(z) = \frac{e^3}{z(1 - e^6 z^{-2})};$$

$$f_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 3^n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$f_n = \begin{cases} e^{3n} & \text{se } n = 0, 5, 10, 15, 20, ... \\ 2 & \text{se } n = 1, 6, 11, 16, 21, ... \\ n & \text{se } n = 2, 7, 12, 17, 22, ... \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_n = \begin{cases} \pi & \text{se } n = 3k, k \in \mathbb{N} \\ n & \text{se } n = 3k+1, k \in \mathbb{N} \\ 2^n & \text{se } n = 3k+2, k \in \mathbb{N} \end{cases} .$$