APPLICAZIONI di MATEMATICA

1 La Trasformata di Laplace nell'analisi di reti elettriche - Cenni

1.1 Introduzione

In molti settori dell'ingegneria ci si trova spesso di fronte al problema di studiare un sistema fisico con una o più grandezze in entrata (cioè grandezze su cui si può intervenire) ed una o più grandezze in uscita (ossia grandezze che sono determinate dalle precedenti e dalle caratteristiche del sistema) (vedi Figura 1).

Figura 1. *Sistema fisico*

Un semplice esempio è dato dal circuito RCL-serie con una f.e.m. applicata E (vedi Figura 2): esso può essere pensato come un sistema fisico in cui la tensione E rappresenta l'entrata, la tensione v ai capi del condensatore rappresenta l'uscita, ed i componenti R, L, C sono le caratteristiche del sistema[1].

[1] Naturalmente i ruoli di "ingresso" ed "uscita" possono essere scambiati e/o modificati.

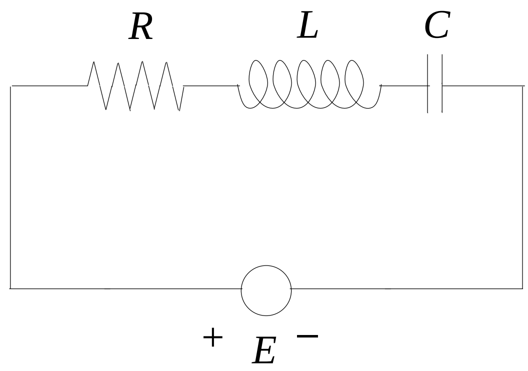

Figura 2. *Circuito RCL-serie*

Un sistema fisico quindi non è altro che una "trasformazione" Φ dell'ingresso (o degli ingressi) i nell'uscita (o nelle uscite) u:

$$\Phi\{i\} = u.$$

Nella rappresentazione del sistema fisico tramite modelli matematici, tale "legge" Φ viene espressa, in molti casi, tramite un'equazione differenziale (o un sistema di equazioni differenziali). Ad esempio, in riferimento al circuito RCL-serie sopra considerato, dalla legge di Kirchhoff sulle tensioni, si ottiene

$$LCv'' + RCv' + v = E \tag{1}$$

dove v rappresenta la tensione ai capi del condensatore. L'equazione di equilibrio (1), che lega tra loro l'ingresso E e l'uscita v, è quindi un'equazione differenziale del secondo ordine lineare non omogenea.

I problemi connessi con lo studio di sistemi fisici sono molteplici e di varia tipologia; qui vogliamo soltanto ricordare, a titolo di esempio, i seguenti:

a) assegnato il sistema fisico ed assegnato l'ingresso, determinare l'uscita;

b) assegnato il sistema fisico, determinare quali ingressi danno luogo ad un'uscita di tipo fissato.

Sempre in riferimento al circuito RLC-serie, esempi di problemi tipo a), b) sono i seguenti:

a$'$) assegnati i valori di resistenza, induttanza, capacità, assegnata la f.e.m. E, determinare la tensione v ai capi del condensatore;

b$'$) assegnati i valori di resistenza, induttanza, capacità, determinare quali f.e.m. E producono, ai capi del condensatore, una tensione v di caratteristiche fissate.

Dal punto di vista matematico, il problema a$'$) si traduce nel risolvere l'equazione differenziale (1): tale problema può essere risolto con tecniche classiche senza eccessive difficoltà qualora la funzione E sia di tipo elementare (polinomiale, esponenziale, ...); esso può presentare invece sensibili difficoltà di calcolo qualora E assuma forme particolari. Ad esempio si provi a determinare la forma esplicita della soluzione del problema

$$\begin{cases} x'' + 7x' + 12x = E(t) \\ x(0) = 3 \\ x'(0) = 4 \end{cases}$$

dove E è la funzione periodica di periodo 2 (vedi Figura 3)

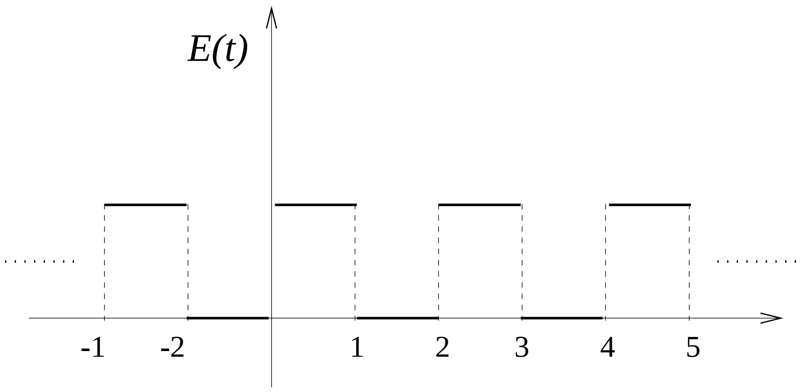

Figura 3. *La funzione E*

tale che

$$E(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t \in [0,1) \\ 0 & \text{se} \quad t \in [1,2). \end{cases}$$

La formulazione matematica di problemi tipo b$'$) è meno immediata. Un esempio è il seguente:

- *"Per quali funzioni E ogni soluzione di*

  $$x'' + 3x' + 2x = E(t)$$

  tende a zero per $t \to \infty$?"

La risolubilità di tale problema con tecniche classiche non è semplice. Si pensi allora alle difficoltà cui si va incontro allorché si considerino sistemi fisici più complicati.

Un valido strumento per affrontare problematiche di questo genere è costituito dal "metodo della trasformata di Laplace".

1.2 Definizioni Preliminari

Prima di definire la trasformata di Laplace, introduciamo alcuni concetti.

Definizione 1. *La funzione f si dice* **di classe $\mathbf{\Lambda^1}$**, *e scriveremo $f \in \Lambda^1$, se*

a) f è nulla per $t < 0$;
b) esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-xt}\,dt < \infty.$$

È evidente che se $\int_0^\infty |f(t)|e^{-xt}dt < \infty$, allora $\int_0^\infty |f(t)|e^{-yt}dt < \infty$ per ogni $y > x$.

Definizione 2. *Sia $f \in \Lambda^1$. Si chiama* **ascissa di convergenza** *di f il numero reale α_f dato da*

$$\alpha_f = \inf\left\{x \in \mathbb{R} : \int_0^\infty |f(t)|e^{-xt}dt < \infty.\right\}. \qquad (2)$$

Se l'insieme numerico a secondo membro della (2) è inferiormente illimitato, si porrà $\alpha_f = -\infty$.

I seguenti esempi illustrano le precedenti definizioni.

Esempio 1. Sia $u = u(t)$ la funzione scalino, i.e.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t > 0 \\ 0 & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Risulta immediatamente $u(t) \in \Lambda^1$ e $\alpha_u = 0$. Si osservi che $u(t)$ non è integrabile su $[0, \infty)$.

Esempio 2. La funzione

$$f_1(t) = e^{2t}u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \le 0 \\ e^{2t} & \text{se} \quad t > 0 \end{cases}$$

è una funzione di classe Λ^1, in quanto $e^{2t}e^{-xt}$ è integrabile su $[0, \infty)$ qualunque sia $x > 2$. Pertanto $\alpha_f = 2$.

Esempio 3. La funzione

$$f_2(t) = \cos t \, u(t)$$

è una funzione di classe Λ^1, essendo $|\cos t|e^{-xt} \le e^{-xt}$ integrabile su $[0, \infty)$ qualunque sia $x > 0$. Inoltre $\alpha_f = 0$.

Esempio 4. La funzione

$$f_3(t) = tu(t)$$

è una funzione di classe Λ^1, essendo te^{-xt} integrabile su $[0, \infty)$ qualunque sia $x > 0$. Inoltre $\alpha_f = 0$.

Esempio 5. La funzione

$$f_4(t) = te^{-3t}\, u(t)$$

è una funzione di classe Λ^1, in quanto $te^{-3t}e^{-xt} = te^{-(3+x)t}$ integrabile su $[0, \infty)$ qualunque sia $x > -3$. Inoltre $\alpha_f = -3$.

Esempio 6. La funzione

$$f_5(t) = e^{t^2}\, u(t)$$

non è di classe Λ^1, in quanto $e^{t^2}e^{-xt} = e^{t^2 - xt}$ non è integrabile su $[0, \infty)$ qualunque sia $x \in \mathbb{R}$.

È immediato notare che ogni funzione di classe Λ^1 e limitata ha ascissa di convergenza non positiva. Tale condizione tuttavia è soltanto sufficiente come illustra l'Esempio 4.

In un certo senso l'ascissa di convergenza dà una valutazione sul comportamento, per $t \to \infty$, della funzione $|f|$: se $\alpha_f > 0$, allora $|f|$ tende esponenzialmente a ∞, mentre se $\alpha_f < 0$, allora $|f|$ tende esponenzialmente a zero. Essa è tanto più grande quanto più velocemente $|f|$ tende a ∞ e, come si deduce subito da (2), ogni $f \in \Lambda$ e a supporto compatto[2] ha ascissa di convergenza $\alpha_f = -\infty$.

[2]Una funzione f si dice a supporto compatto se esiste un intervallo compatto $[a, b]$ tale che $f(t) = 0$ per $t \notin [a, b]$.

Esempio 7. La funzione

$$f_6(t) = t[u(t) - u(t-3)] = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \notin [0,3] \\ t & \text{se} \quad t \in [0,3] \end{cases}$$

è di classe Λ^1 in quanto te^{-xt} è continua e quindi integrabile su $[0,3]$ qualunque sia $x \in \mathbb{R}$ e, ovviamente, $|f_6(t)|e^{-xt} = 0$ per ogni $t > 3$, qualunque sia $x \in \mathbb{R}$. Pertanto $\alpha_{f_6} = -\infty$.

Osserviamo infine che esistono funzioni non a supporto compatto, per le quali $\alpha = -\infty$. Ad esempio la funzione f_7 data da

$$f_7(t) = e^{-t^2}\, u(t)$$

non è a supporto compatto, è di classe Λ^1 e $\alpha_{f_7} = -\infty$.

Nel testo di riferimento *M. Marini, "Metodi Matematici per lo Studio delle Reti Elettriche"*, la trasformata di Laplace è definita in modo leggermente diverso, ossia per funzioni di classe Λ. È facile verificare che se $f \in \Lambda$ allora $f \in \Lambda^1$ ma in generale non vale il viceversa. Quindi la Definizione data qui risulta più generale.

1.3 La Trasformata di Laplace

Sia $f \in \Lambda^1$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza; sia poi s un numero complesso con $\operatorname{Re} s > \alpha_f$. Sia ha la seguente:

Definizione 3. *Si chiama* **trasformata di Laplace** *di f la funzione complessa di variabile complessa $F(s)$ definita nel semipiano* $\operatorname{Re} s > \alpha_f$ *da*

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (\operatorname{Re} s > \alpha_f). \tag{3}$$

Fissato s, con $\operatorname{Re} s > \alpha_f$, la trasformata di Laplace è un numero complesso le cui parti reale e immaginaria sono date, nel caso in cui f assuma valori reali, dai due integrali

$$\operatorname{Re} F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-t \operatorname{Re} s} \cos(t \operatorname{Im} s)\, dt$$

$$\operatorname{Im} F(s) = -\int_0^\infty f(t) e^{-t \operatorname{Re} s} \sin(t \operatorname{Im} s)\, dt$$

oppure, nel caso in cui f assuma valori complessi, da

$$\operatorname{Re} F(s) = \int_0^\infty (f_r(t)\cos(t \operatorname{Im} s) + f_i(t)\sin(t \operatorname{Im} s))\, e^{-t \operatorname{Re} s}\, dt$$
$$\operatorname{Im} F(s) = \int_0^\infty (f_i(t)\cos(t \operatorname{Im} s) - f_r(t)\sin(t \operatorname{Im} s))\, e^{-t \operatorname{Re} s}\, dt$$

dove $f_r = \operatorname{Re} f$, $f_i = \operatorname{Im} f$.

La definizione di trasformata di Laplace è ben posta, nel senso che se $f \in \Lambda^1$ e $\operatorname{Re} s > \alpha_f$, allora l'integrale che definisce la trasformata converge. Infatti, tenendo conto che $|e^{-st}| = e^{-t \operatorname{Re} s}$, dalla definizione di classe Λ^1 si ha subito:

Proposizione 1. *Sia $f \in \Lambda^1$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza. Allora l'integrale*

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt$$

converge assolutamente per ogni numero complesso s tale che $\operatorname{Re} s > \alpha_f$.

La trasformata di Laplace può essere interpretata anche come operatore tra due spazi di funzioni: precisamente come quell'operatore L che associa a $f \in \Lambda^1$ la funzione complessa di variabile complessa F definita da (3). Per tale ragione indicheremo la trasformata di Laplace di una funzione f di classe Λ o usando la corrispondente lettera maiuscola F, oppure il simbolo $L[f]$.

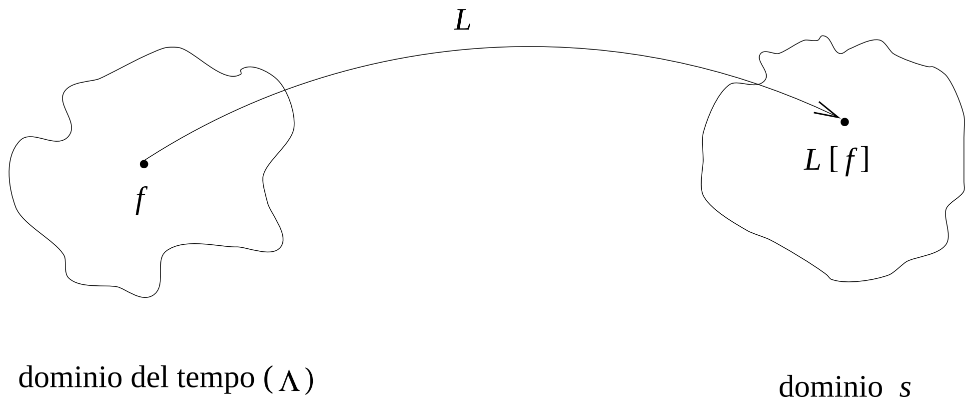

Figura 4.

Nelle applicazioni di natura ingegneristica, in particolare in quelle collegate alla Teoria delle reti elettriche, lo spazio Λ^1, ossia il dominio dell'operatore Trasformata di Laplace, è chiamato "*dominio del tempo*" e il rango "*dominio s*" oppure "*dominio della frequenza*" (vedi Figura 4).
Si ha poi la seguente:

Definizione 4. *Sia $f \in \Lambda^1$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza. Si chiama* **semipiano di convergenza** *il sottoinsieme $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \alpha_f\}$.*

Nel caso in cui $\alpha_f = -\infty$, la precedente dizione è impropria: in tal caso infatti la trasformata è definita per ogni $s \in \mathbb{C}$. Il semipiano di convergenza (vedi Figura 5) è tanto più grande, quanto più piccola è l'ascissa di convergenza; se $|f|$ cresce "esponenzialmente" per $t \to \infty$, allora tale semipiano è strettamente contenuto nel primo e quarto quadrante del piano complesso $\mathbb{C}$, mentre tale semipiano contiene il primo e quarto quadrante di $\mathbb{C}$ nel caso in cui $|f|$ sia limitata. Infine tale semipiano coincide con l'intero piano $\mathbb{C}$ nel caso in cui f sia a supporto compatto.

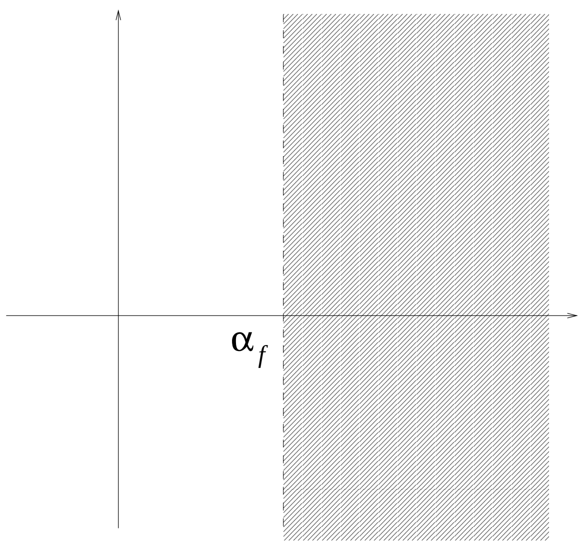

Figura 5. *Semipiano di convergenza*

Una prima proprietà della trasformata di Laplace discende subito dalla espressione della parte reale e immaginaria della trasformata. Si ha infatti la seguente:

Proposizione 2. *Sia $f \in \Lambda^1$. Allora*

$$\lim_{\operatorname{Re} s \to +\infty} F(s) = 0. \tag{4}$$

Dim. Supponiamo per semplicità che f assuma valori reali. Avendosi

$$\begin{aligned}|\operatorname{Re} F(s)| &= \left| \int_0^\infty f(t) e^{-t \operatorname{Re} s} \cos(t \operatorname{Im} s)\, dt \right| \\ &\leq \int_0^\infty \left| f(t) e^{-t \operatorname{Re} s} \cos(t \operatorname{Im} s) \right| \, dt \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-t \operatorname{Re} s}\, dt,\end{aligned}$$

si ottiene

$$\lim_{\operatorname{Re} s \to +\infty} \operatorname{Re} F(s) = 0.$$

Per quanto concerne la parte immaginaria, il ragionamento è analogo. □

Un'altra immediata proprietà della trasformata di Laplace è data dalla seguente proposizione:

Proposizione 3. *Sia $f \in \Lambda^1$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza. Allora F è analitica in tutto il semipiano di convergenza.*

Proposizione 4. *Sia $f \in \Lambda^1$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza. Allora la trasformata di Laplace F ha almeno un punto singolare sulla retta* $\operatorname{Re} s = \alpha_f$ *(nel caso in cui $\alpha_f = -\infty$ tale punto singolare è $s = \infty$.*

Osservazione 1. Nella definizione di $L[f]$ non intervengono i valori che la funzione f assume sull'asse reale negativo. L'avere supposto perciò $f(t) = 0$ per $t < 0$ può sembrare superfluo. Tale ipotesi in realtà è stata posta solo per comodità di notazioni.

1.4 Alcune Proprietà

Tra le proprietà della trasformata di Laplace, alcune sono molto importanti soprattutto per le loro applicazioni alla teoria delle reti elettriche. Per le altre proprietà della trasformata rimandiamo al testo di riferimento (M. Marini, Metodi matematici per lo studio delle reti elettriche).

La prima proprietà è una immediata conseguenza della linearità dell'integrale.

Proposizione 5 (Linearità)**.** *Siano* $f_1, f_2 \in \Lambda^1$ *, e siano* c_1, c_2 *due costanti complesse. Allora la funzione*

$$g = c_1 f_1 + c_2 f_2$$

è di classe Λ^1 *e*

$$L[g] = c_1 L[f_1] + c_2 L[f_2].$$

Osserviamo esplicitamente che le ipotesi "$f_1, f_2 \in \Lambda^1$" non possono essere sostituite, in generale, dalla condizione "$g \in \Lambda^1$". Ad esempio le due funzioni

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ t^{-1}e^t & \text{se } t > 0, \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ -t^{-1} & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

non appartengono alla classe Λ^1; al contrario la funzione g data da

$$g(t) = f_1(t) + f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ t^{-1}(e^t - 1) & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

lo è. Pertanto a tale funzione g non è lecito applicare la proprietà della linearità espressa dalla Proposizione precedente.

Teorema 1 (Teorema della derivazione)**.** *Sia* $f \in C^1(0, \infty)$ *e* $f, f' \in \Lambda^1$. *Allora*

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0^+)$$

dove $f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$.

Osservazione 2. Nel precedente Teorema l'ipotesi "f' di classe Λ^1" non può essere rimossa, in quanto esistono funzioni di classe Λ^1, derivabili, la cui derivata non è di classe Λ^1. Ad esempio ciò accade per la funzione $f(t) = \sin(e^{t^2})u(t)$.

Una immediata conseguenza del precedente risultato è il seguente:

Corollario 1. *Sia* $f \in C^2(0, \infty)$ *e* $f, f', f'' \in \Lambda^1$. *Allora*

$$L[f''(t)] = s^2 L[f(t)] - sf(0^+) - f'(0^+)$$

dove $f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$, $f'(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f'(t)$.
In generale, se $f \in C^k(0, \infty)$ *e* $f, f', ..., f^{(k)} \in \Lambda^1$, *allora*

$$L[f^{(k)}(t)] = s^k L[f] - s^{k-1} f(0^+) - s^{k-2} f'(0^+) - \ldots - f^{(k-1)}(0^+).$$

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$[3]. Allora è possibile provare che per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau$$

è convergente. Tale fatto suggerisce allora la seguente:

Definizione 5. *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Si chiama* **prodotto di convoluzione** *delle funzioni f e g, e si indica con $f * g$, la funzione h data da*

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Il prodotto di convoluzione assume una veste più semplice se f, g sono funzioni di classe Λ^1. In tal caso infatti $f(\tau) = 0$ per $\tau < 0$ e $g(t-\tau) = 0$ per $\tau > t$. Pertanto (5) assume la forma

$$f, g \in \Lambda^1 \Rightarrow h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau. \tag{6}$$

Integrali del tipo (6) intervengono in vari problemi, in particolare nella risoluzione di alcune classi di equazioni differenziali. Ad esempio, data l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x = b(t) \tag{7}$$

con $a_i \in \mathbb{R}$ e b continua a tratti per $t \geq 0$, si può provare che la soluzione di (7) soddisfacente le condizioni iniziali $x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0$ assume la forma

$$x(t) = \int_0^t k(t-\tau)b(\tau)\, d\tau$$

dove k è una funzione legata alle soluzioni dell'equazione omogenea

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y = 0$$

[3]Ricordiamo che una funzione f appartiene allo spazio $L^1(\mathbb{R})$ se e solo se tale funzione è assolutamente integrabile sull'asse reale, ossia se e solo se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty.$$

associata a (7). A titolo di esempio, per l'equazione differenziale del primo ordine

$$x' - ax = b(t),$$

dove $a \in \mathbb{R}$, è immediato verificare che la soluzione x soddisfacente la condizione iniziale $x(0) = 0$ è data da

$$x(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} b(\tau)\, d\tau.$$

È facile provare che l'operazione di convoluzione gode delle proprietà commutativa, associativa e distributiva del prodotto rispetto alla somma. In altri termini, se $f_1, f_2, f_3 \in \Lambda^1$ valgono le seguenti:

$$\begin{aligned} f_1 * f_2 &= f_2 * f_1 \\ (f_1 * f_2) * f_3 &= f_1 * (f_2 * f_3) \\ f_1 * (f_2 * f_3) &= f_1 * f_2 + f_1 * f_3. \end{aligned}$$

All'operazione di convoluzione nel dominio del tempo corrisponde, nel dominio della frequenza, il prodotto ordinario: in altre parole l'algoritmo della trasformata di Laplace muta il prodotto di convoluzione nel prodotto ordinario. Vale infatti il seguente:

Teorema 2 (Convoluzione)**.** *Siano $f, g \in \Lambda^1$, e α_f, α_g le rispettive ascisse di convergenza e sia $L[f] = F$, $L[g] = G$. Allora il prodotto di convoluzione h dato da (6) è di classe Λ^1 e si ha*

$$L[h] = L[f * g] = F(s)G(s).$$

per ogni numero complesso s tale che $\operatorname{Re} s > \max(\alpha_f, \alpha_g)$.

Dal Teorema precedente si ha subito il seguente teorema di integrazione. Basta infatti considerare $g(t) = u(t)$ e tenere conto del fatto che $L[u(t)] = 1/s$.

Corollario 2 (Integrazione)**.** *Sia $f \in \Lambda^1$, sia α_f la sua ascissa di convergenza e sia $F(s) = L[f]$. Allora la funzione integrale h data da*

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

è di classe Λ^1 e

$$L[h(\tau)] = L[\int_0^t f(\tau)\, d\tau] = \frac{F(s)}{s}, \qquad \operatorname{Re} s > \max(\alpha_f, 0).$$

1.5 Applicazioni a Circuiti Elettrici

Consideriamo il circuito RLC-serie in Figura 6 e siano $v(t)$ la f.e.m. applicata, R la resistenza, L l'induttanza, C la capacità e q_0 la carica iniziale del condensatore. All'istante $t = 0$ chiudiamo l'interruttore e determiniamo la corrente i che percorre il circuito.

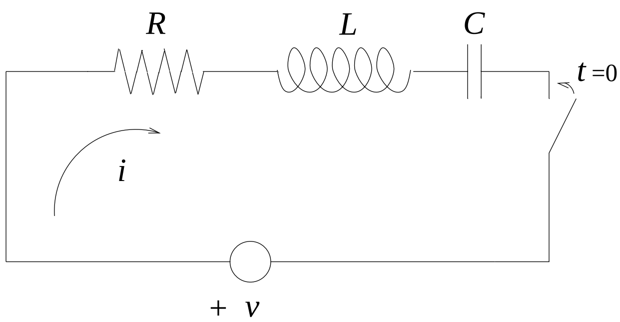

Figura 6.

L'equazione di equilibrio, ottenuta applicando le leggi di Kirchhoff, è l'equazione integro-differenziale

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + \frac{q_0}{C} = v(t) \qquad (t > 0). \tag{8}$$

Per calcolare la corrente potremo derivare l'equazione precedente e poi risolvere l'equazione differenziale del II ordine così ottenuta; tale approccio però non può essere utilizzato se l'eccitazione v è una funzione discontinua. Un'altra possibilità consiste nell'applicare l'algoritmo della trasformata di Laplace in quanto si può provare che se v è una funzione di classe Λ^1, allora tutte le altre grandezze elettriche del circuito considerato lo sono. Applicando dunque la trasformata di Laplace a (8) ed usando il Teorema di derivazione e il Teorema di integrazione si ottiene[4]

$$sLI(s) + RI(s) + \frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) + \frac{q_0}{Cs} = V(s) \tag{9}$$

dove I e V indicano rispettivamente le trasformate di i e v. Da (9) si ha poi

$$\left[sL + R + \frac{1}{Cs}\right] I(s) = V(s) - \frac{q_0}{Cs}$$

[4]si ricorda che $L[u(t)] = 1/s$ dove $u(t)$ è la funzione scalino.

ossia

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL + R + \dfrac{1}{Cs}} + \frac{q_0}{Cs\left(sL + R + \dfrac{1}{Cs}\right)}. \tag{10}$$

Siamo così passati da un'equazione integro-differenziale nel "dominio t" ad una equazione algebrica nel "domino s", ossia ad una equazione nella quale, al posto di derivate e integrali, compaiono moltiplicazioni e divisioni per il numero complesso s. Per determinare il valore della corrente i sarà poi sufficiente antitrasformare l'espressione (10).

Prima di fare qualche esempio particolare, facciamo qualche altra considerazione di natura teorica.

Il circuito in esame può essere pensato, da un punto di vista ingegneristico, come un sistema fisico con una grandezza in entrata (la tensione v) ed una grandezza in uscita (la corrente i che percorre il circuito); i parametri R, L, C, sono i *componenti* del sistema e (8) è la legge che modella tale sistema nel dominio del tempo. Nel dominio della frequenza la legge di equilibrio diviene la (10), legge che lega tra loro le trasformate dell'entrata e dell'uscita.

Nel caso poi che $q_0 = 0$, tale legame diviene:

$$I(s) = \underbrace{\frac{1}{sL + R + \dfrac{1}{Cs}}}_{(+)} V(s); \tag{11}$$

indicando con T la funzione (+)

$$T(s) = \frac{1}{sL + R + \dfrac{1}{Cs}}$$

(11) assume la forma

$$I(s) = T(s)V(s);$$

la funzione T prende nome di *ammettenza di trasferimento*[5]; si osservi poi che tale funzione dipende soltanto dai componenti del sistema. In base alla proprietà di convoluzione, possiamo poi affermare che, in questo caso, l'uscita,

[5] Il motivo del nome è dovuto al fatto che T è il rapporto tra le trasformate di una corrente e di una tensione e, nel dominio t, tale rapporto prende nome di ammettenza.

ossia la corrente che percorre il circuito, è data dal prodotto di convoluzione tra l'ingresso v e l'antitrasformata della ammettenza di trasferimento T:

$$i = v * L^{-1}[T].$$

Naturalmente, come appare ovvio, i ruoli di "grandezza in entrata" e "grandezza in uscita" possono scambiarsi: il circuito ora considerato può essere interpretato anche come un sistema fisico in cui l'ingresso è la corrente e l'uscita è la tensione applicata. Se questo è il caso, conviene scrivere la legge di equilibrio (10) nella forma (equivalente)

$$V(s) = \frac{q_0}{Cs} + \left[sL + R + \frac{1}{Cs}\right] I(s)$$

che, nel caso in cui $q_0 = 0$, diviene:

$$V(s) = \underbrace{\left[sL + R + \frac{1}{Cs}\right]}_{(*)} I(s).$$

La funzione $(*)$ prende nome di *impedenza di trasferimento* [6] ed è l'inversa della funzione T sopra considerata.

[6] Il motivo del nome è dovuto al fatto che tale funzione è il rapporto tra le trasformate di una tensione e di una corrente, rapporto che, nel dominio t, prende nome di impedenza.