APPLICAZIONI di MATEMATICA

1 Funzioni Reali Positive

1.1 Introduzione

In questo Capitolo esamineremo le proprietà di una particolare classe di funzioni di trasferimento: le *funzioni reali positive*. Ciò è da mettersi in relazione con l'impiego di tali funzioni nella Teoria delle reti elettriche, impiego che ora, brevemente, illustreremo, rinviando, per maggiori dettagli, al paragrafo 1.10.

Ricordiamo che prende nome di *rete elettrica (passiva)* ogni insieme finito di elementi (resistori, condensatori, induttori) tra loro connessi in un modo qualunque.

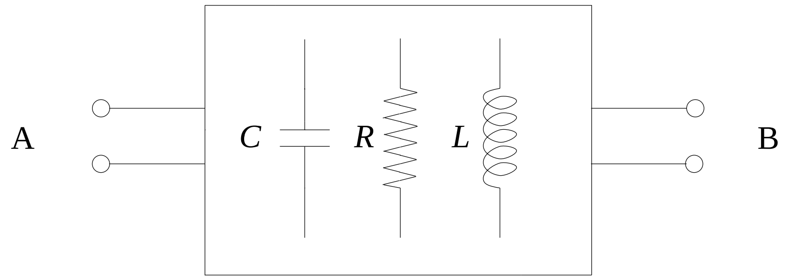


Figura 1. *Schematizzazione di un generico circuito RLC a due porte: A porta di ingresso, B porta di uscita*

In ipotesi di schematizzazione teorica (che inducono, ad esempio, a considerare reti lineari, invariabili nel tempo, a costanti concentrate) e riferendoci a reti fornite di due sole "porte", una di ingresso e una di uscita (vedi Figura 1), prendono nome di *funzioni di rete* o, più in generale, di *funzioni di* *trasferimento*, quelle funzioni che esprimono il rapporto tra grandezze legate al segnale di ingresso e grandezze legate al segnale di uscita, o viceversa.

Nell'ambito della Teoria delle reti elettriche può essere provato che, applicando la trasformata di Laplace alle equazioni integro-differenziali che modellano il circuito considerato, si ottengono, come funzioni di rete, funzioni razionali reali della variabile complessa s.

Consideriamo di nuovo il circuito RLC-serie (vedi figura 2).

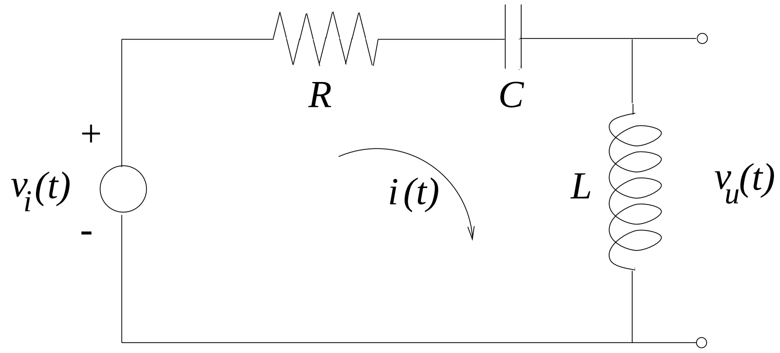


Figura 2. *Circuito RLC-serie con ingresso v_i e uscita v_u*

Siano $v_i(t)$ la f.e.m. applicata, R la resistenza del resistore, C la capacità del condensatore e L l'induttanza dell'induttore. Supponiamo poi che il condensatore sia inizialmente scarico.

Pensando tale circuito come un sistema in cui la grandezza in ingresso è la tensione v_i e la grandezza in uscita è la tensione v_u ai capi dell'induttore, applicando la trasformata di Laplace[1] si ottiene il sistema algebrico

$$\begin{cases} I(s) = \dfrac{1}{sL + R + \dfrac{1}{sC}} V_i(s) \\ V_u(s) = sLI(s) \end{cases} \tag{1}$$

dove V_i, V_u, I sono le trasformate rispettivamente delle tensioni v_i, v_u e della corrente i. Da (1) si ha allora

$$V_u(s) = \frac{sL}{sL + R + \dfrac{1}{sC}} V_i(s)$$

[1]Supponiamo, naturalmente, che tutte le grandezze coinvolte siano funzioni di classe Λ^1.

ossia

$$V_u(s) = \frac{LCs^2}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s);$$

la funzione T_1 data da

$$T_1(s) = \frac{LCs^2}{LCs^2 + RCs + 1}$$

esprime il rapporto tra le trasformate delle tensioni di uscita e di ingresso ed è quindi una funzione di rete.

Naturalmente i "ruoli" di "grandezza di ingresso" e/o "grandezza di uscita", possono variare. In riferimento al circuito di sopra, potremo scegliere, come grandezza in uscita, la tensione w_u ai capi del resistore.

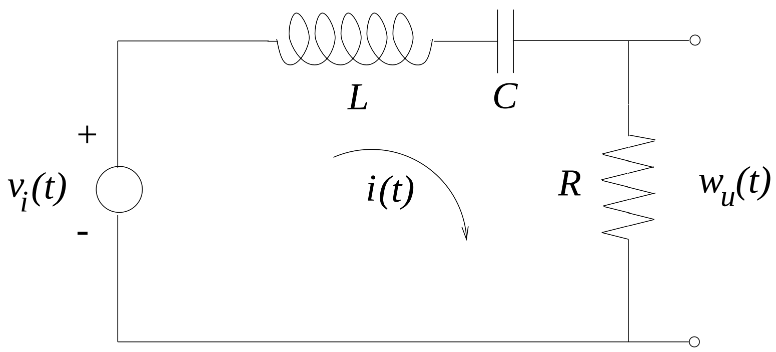


Figura 3. *Circuito RCL-serie con ingresso v_i e uscita w_u*

In tal caso il circuito viene rappresentato nella forma illustrata in Figura 3 e, applicando la trasformata di Laplace, si ha

$$\begin{cases} I(s) = \dfrac{1}{sL + R + \dfrac{1}{sC}} V_i(s) \\ W_u(s) = RI(s) \end{cases} \tag{2}$$

dove, come al solito, V_i, W_u, I sono le trasformate rispettivamente delle tensioni v_i, w_u e della corrente i. Da (2) si ha allora

$$W_u(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s);$$

la funzione T_2 data da

$$T_2(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

è quindi un altro esempio di funzione di rete, in quanto esprime il rapporto tra le trasformate di Laplace delle tensioni in uscita e in ingresso.

In generale, indicando con V_i, I_i, V_u, I_u rispettivamente le trasformate delle tensioni e delle correnti in ingresso e in uscita, possono aversi i seguenti tipi di funzione di rete

$\frac{V_u}{V_i}$	funzione di traferimento in tensione
$\frac{I_u}{I_i}$	funzione di trasferimento in corrente
$\frac{V_u}{I_i}$	impedenza di trasferimento
$\frac{I_u}{V_i}$	ammettenza di trasferimento
$\frac{I_i}{V_i}$	ammettenza di ingresso
$\frac{V_i}{I_i}$	impedenza di ingresso
$\frac{I_u}{V_u}$	ammettenza di uscita
$\frac{V_u}{I_u}$	impedenza di uscita.

Nell'ambito della Teoria delle reti elettriche si può provare che alcune di queste funzioni di rete godono di particolari proprietà: la "reale positività". Ciò accade in particolare per quelle funzioni che esprimono il rapporto tra grandezze legate alla stessa porta (i.e. di ingresso o di uscita). Pertanto le ultime quattro funzioni godono di questa proprietà e sono quindi funzioni reali positive. Le prime quattro funzioni considerate possono essere funzioni reali positive, oppure non esserlo. In riferimento all'esempio sopra considerato, vedremo che la funzione T_1 non è reale positiva, mentre invece lo è la funzione T_2.

Queste considerazioni giustificano l'interesse per le funzioni reali positive le cui principali proprietà sono oggetto dei successivi paragrafi.

1.2 Definizioni

Sia $F : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una funzione complessa di variabile complessa. Poniamo le seguenti definizioni

Definizione 1. *La funzione F si dice* **reale** *(e scriveremo $F \in R$.) se nel suo dominio di definizione risulta soddisfatta la condizione:*

$$\operatorname{Im} s = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} F(s) = 0. \tag{3}$$

Definizione 2. *La funzione F si dice* **positiva** *(e scriveremo $F \in P$.) se nel suo dominio di definizione risulta soddisfatta la condizione:*

$$\operatorname{Re} s \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re} F(s) \geq 0. \tag{4}$$

In altri termini una funzione è reale se assume valori reali per valori reali della variabile complessa s ed è positiva se assume valori con parte reale non negativa per valori di s aventi parte reale non negativa.

Il significato geometrico delle definizioni precedenti è subito chiaro pensando la funzione $z = F(s)$ come una trasformazione piana, i.e. come una trasformazione del piano s nel piano z. Infatti essa è reale se trasforma l'asse reale nell'asse reale (vedi Figura 4),

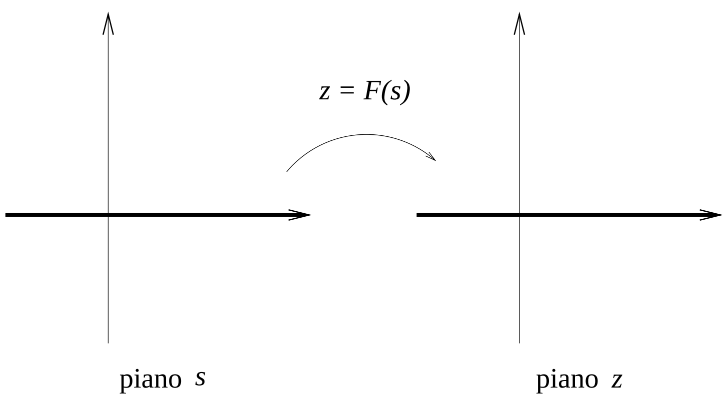


Figura 4. *Rappresentazione di una funzione reale*

ed è positiva se trasforma il semipiano chiuso, costituito dal I e dal IV quadrante, asse immaginario compreso, in se stesso (vedi Figura 5).

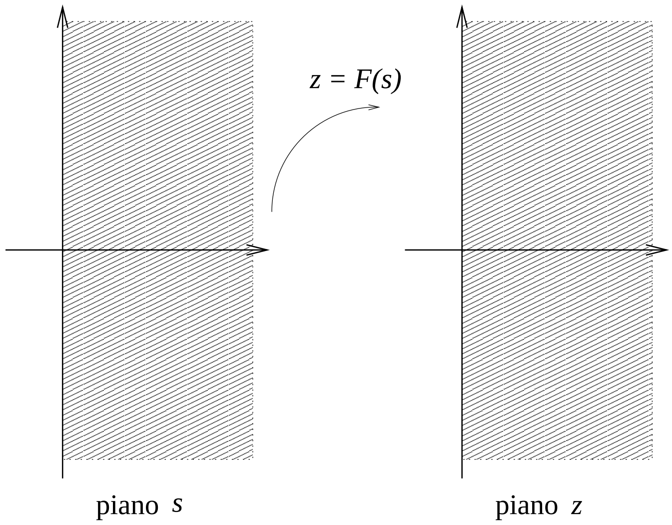


Figura 5. *Rappresentazione di una funzione positiva*

I seguenti esempi illustrano le precedenti definizioni.

Esempio 1. Consideriamo la funzione F data da

$$F(s) = s^2.$$

Avendosi

$$F(s) = F(x + jy) = \underbrace{x^2 - y^2}_{\mathrm{Re}\, F} + \underbrace{2xy}_{\mathrm{Im}\, F}\, j$$

ne segue che

$$\mathrm{Im}\, s = y = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, F(s) = 2xy = 0$$

e quindi F verifica (1) ed è perciò reale. Invece

$$\mathrm{Re}\, s = x \geq 0 \not\Rightarrow \mathrm{Re}\, F(s) = x^2 - y^2 \geq 0$$

e quindi F non è positiva.

Esempio 2. Consideriamo la funzione F data da

$$F(s) = j|s|.$$

Avendosi

$$F(s) = F(x + jy) = \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{\mathrm{Im}\, F}\, j$$

ne segue che

$$\mathrm{Im}\, s = y = 0 \not\Rightarrow \mathrm{Im}\, F(s) = |x| = 0$$

e quindi la F non è reale, in quanto non verifica la (1). Invece

$$\mathrm{Re}\, s = x \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\, F(s) = 0$$

e quindi (2) è verificata e F è positiva.

Esempio 3. Consideriamo la funzione F data da

$$F(s) = e^{js}.$$

Avendosi

$$F(s) = F(x + jy) = e^{j(x+jy)} = \underbrace{e^{-y} \cos x}_{\mathrm{Re}\, F} + j\, \underbrace{e^{-y} \sin x}_{\mathrm{Im}\, F}$$

ne segue che

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, s = y = 0 &\not\Rightarrow \mathrm{Im}\, F(s) = \sin x = 0 \\ \mathrm{Re}\, s = x \geq 0 &\not\Rightarrow \mathrm{Re}\, F(s) = e^{-y} \cos x \geq 0. \end{aligned}$$

Pertanto F non è né reale, né positiva.

Esempio 4. Consideriamo la funzione F data da

$$F(s) = s + 1.$$

Avendosi

$$F(s) = F(x + jy) = \underbrace{x + 1}_{\mathrm{Re}\, F} + \underbrace{y}_{\mathrm{Im}\, F}\, j$$

ne segue che

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, s = y = 0 &\Rightarrow \mathrm{Im}\, F = y = 0 \\ \mathrm{Re}\, s = x \geq 0 &\Rightarrow \mathrm{Re}\, F = x + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

e quindi, essendo verificate (1) e (2), F è reale positiva, ossia $F \in$ R.P.

Proposizione 1. *La somma di funzioni R.P. è R.P.*

Dim. Siano F_1, $F_2 \in$ R.P. e sia

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s).$$

Si vede facilmente che

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(s) &= \operatorname{Re} F_1(s) + \operatorname{Re} F_2(s) \\ \operatorname{Im} F(s) &= \operatorname{Im} F_1(s) + \operatorname{Im} F_2(s) \end{aligned}$$

pertanto per F risultano soddisfatte sia (1) che (2) e quindi $F \in$ R.P. $\square$

Osservazione 1. In generale la differenza di funzioni positive può non essere positiva. A tale scopo è sufficiente considerare le funzioni $F_1(s) = 2s$, $F_2(s) = 5s$. Evidentemente F_1, $F_2 \in$ P.; tuttavia per la funzione F data da

$$F(s) = F_1(s) - F_2(s) = -3s,$$

(2) non è soddisfatta e quindi F non è positiva.

Proposizione 2. *Una funzione F è reale positiva se e solo se lo è la sua reciproca $1/F$.*

Dim. L'asserto è quasi immediato. Scriviamo la funzione F nella forma

$$F = u + jv,$$

indicando, come al solito, con u la sua parte reale e con v la sua parte immaginaria. Allora si ha

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{u + jv} = \frac{u - jv}{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} - j\frac{v}{u^2 + v^2};$$

pertanto

$$\operatorname{Re} \frac{1}{F} = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad \operatorname{Im} \frac{1}{F} = -\frac{v}{u^2 + v^2}. \tag{5}$$

Poiché $F \in$ R.P. sappiamo che

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} s = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} F = v = 0 \\ &\operatorname{Re} s \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re} F = u \geq 0. \end{aligned}$$

Allora, da (5) ne segue

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} s = 0 &\Rightarrow \operatorname{Im} \frac{1}{F} = 0\\ \operatorname{Re} s \geq 0 &\Rightarrow \operatorname{Re} \frac{1}{F} \geq 0\end{aligned}$$

e quindi $1/F \in$ R.P. $\square$

Esempio 5. La funzione F data da

$$F(s) = \frac{3s^2 + 3s + 1}{s + 1}$$

è R.P.. Infatti effettuando la divisione tra numeratore e denominatore si ottiene

$$F(s) = 3s + \frac{1}{s+1};$$

inoltre le funzioni $F_1(s) = 3s$, $F_2(s) = s + 1$ sono R.P. (la verifica è immediata). Pertanto, per la Proposizione 2, anche $1/F_2 \in$ R.P., e poiché la somma di funzioni R.P. è R.P. (Proposizione 1), ne segue l'asserto.

Un altro risultato che ci sarà utile nel seguito è il seguente:

Proposizione 3. *Una funzione F è reale positiva se e solo se lo è la funzione G data da*

$$G(s) = F(\frac{1}{s}).$$

Dim. Sia $F \in$ R.P.. Sostituendo in (1) - (2) la variabile s con $1/s$ si ottiene

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \dfrac{1}{s} = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} F(\dfrac{1}{s}) = 0 \\ \\ \operatorname{Re} \dfrac{1}{s} \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re} F(\dfrac{1}{s}) \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Poiché

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{x + jy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}$$

ne segue

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \dfrac{1}{s} = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} s = 0 \\ \\ \operatorname{Re} \dfrac{1}{s} \geq 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Re} s \geq 0. \end{cases}$$

Allora da (6) si ha che

$$\begin{cases} \operatorname{Im} s = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} F(\dfrac{1}{s}) = 0 \\ \\ \operatorname{Re} s \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re} F(\dfrac{1}{s}) \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

e quindi G è reale positiva. Per dimostrare il viceversa basterà ripetere il ragionamento precedente per la funzione G. □

I due precedenti risultati, come vedremo in seguito, possono ridurre la complessità dei calcoli, in quanto per studiare la reale positività è indifferente considerare la funzione $F(s)$, oppure la sua reciproca $1/F(s)$, oppure la funzione $F(1/s)$.

Nei successivi paragrafi ci limiteremo a considerare il caso delle funzioni razionali, ossia delle funzioni che sono analitiche in tutto il piano complesso, eccetto, al più, un numero finito di punti nei quali si possono presentare singolarità polari e/o eliminabili. Ciò è da mettersi in relazione, come già accennato nell'introduzione e come si vedrà meglio nel seguito, con l'impiego delle funzioni R.P. nell'ambito della Teoria delle reti elettriche.

1.3 Funzioni Razionali Reali

Affrontiamo dapprima il problema di determinare condizioni affinché una funzione razionale della variabile complessa s assuma valori reali per valori reali della variabile s. Si ha il seguente

Teorema 1. *Sia F una funzione razionale, ossia un rapporto di due polinomi $N(s)$ e $D(s)$:*

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

Allora F è reale se e solo se è esprimibile come rapporto di polinomi a coefficienti reali.

Osservazione 2. Notiamo che non è stata fatta alcuna ipotesi sulla natura dei polinomi N e D; in generale questi potranno anche essere a coefficienti misti (reali e complessi). Il teorema 1 ci dice quindi che, nella pratica, per vedere se una funzione razionale è reale (ammesso che N e D siano ridotti ai minimi termini), basterà guardare come è scritta la funzione: se si tratta di due polinomi a coefficienti reali allora F è reale, altrimenti no.

Esempio 6. La funzione

$$F_1(s) = \frac{s+j}{s+1}$$

non è reale, in quanto per valori reali della variabile s, F_1 non assume valori reali (ad esempio $F_1(0) = j$).

Esempio 7. Le funzioni

$$F_2(s) = \frac{s+5}{s+1}, \quad F_3(s) = \frac{js}{js-4j}$$

sono reali, in quanto entrambe sono esprimibili come rapporto di polinomi a coefficienti reali: per F_2 ciò è ovvio, per quanto concerne F_3 basta osservare che

$$F_3(s) = \frac{s}{s-4}.$$

1.4 La Positività: "Test delle Quattro Condizioni"

La verifica della realtà di una funzione razionale è, in virtù del Teorema 1, immediata. Sarà sufficiente infatti che numeratore e denominatore siano polinomi a coefficienti reali. Una conseguenza di ciò è che gli zeri di entrambi tali polinomi sono distribuiti simmetricamente rispetto all'asse reale. Infatti se $\alpha_0 + j\beta_0$ è uno zero del numeratore (o del denominatore) allora anche $\alpha_0 - j\beta_0$ è uno zero dello stesso polinomio, essendo, come detto, tale polinomio a coefficienti reali.

Di più difficile verifica è invece la condizione di positività (4): affrontare direttamente tale verifica può richiedere calcoli non semplici e "fastidiosi. Da qui l'opportunità di determinare condizioni necessarie e/o sufficienti per la positività, la cui verifica sia relativamente agevole. In questo ambito il principale risultato è il seguente:

Teorema 2 (Test delle quattro condizioni)**.** *Sia F una funzione razionale reale. Allora F è positiva se e solo se sono verificate le seguenti condizioni*

1) $\operatorname{Re} F(j\omega) \geq 0$ *per ogni numero complesso immaginario puro* $j\omega$ *appartenente al dominio di definizione di* F*;*
2) F *non ha singolarità (ovviamente polari) nel semipiano aperto* $\operatorname{Re} s > 0$*;*
3) gli eventuali poli di F *situati sull'asse immaginario sono semplici ed hanno residuo reale positivo;*
4) l'eventuale polo all'infinito è semplice e il coefficiente c_1 *nello sviluppo di* F *in serie di Laurent all'infinito è un numero reale positivo.*

La dimostrazione di questo risultato non è agevole: essa si basa su alcuni Lemmi di natura tecnica e sul Principio del massimo modulo. Qui vogliamo fare soltanto alcuni commenti al risultato precedente.

Per quanto riguarda la condizione 4), ricordiamo che c_1 **non è** il residuo di F all'infinito. Esso è il coefficiente del termine "s" nello sviluppo di Laurent all'infinito, mentre il residuo all'infinito è dato, come è noto, dall'opposto del coefficiente del termine "$1/s$".

Ad esempio, per la funzione F_1 data da

$$F_1(s) = \frac{3+s}{s} = 3\frac{1}{s} + 1$$

si ha $c_1 = 0$, $\operatorname{Res}[F, \infty] = -3$. In modo simile per la funzione F_2 data da

$$F_2(s) = \frac{5s^2 + s + 2}{s} = 5s + 1 + 2\frac{1}{s}$$

si ha $c_1 = 5$, $\operatorname{Res}[F, \infty] = -2$.

In ogni caso la condizione 4) è verificata se F non ha un polo all'infinito. Analogamente la condizione 3) è certamente verificata qualora F non presenti singolarità polari sull'asse immaginario.

Le condizioni 2), 3) del Teorema 2 coinvolgono i poli di F. Ricordiamo che gli zeri del denominatore non necessariamente sono anche poli per F, in quanto F potrebbe non essere ridotta ai minimi termini[2].

Se una almeno delle condizioni 1) – 4) non è verificata, allora la funzione non è reale positiva. Il seguente esempio illustra questo fatto.

[2]Funzioni di trasferimento non ridotte ai minimi termini intervengono in alcune applicazioni allo studio di reti elettriche; in tale ambito tale fatto va sotto il nome di "cancellazione zero/polo".

Esempio 8.
a) La funzione F_1 data da

$$F_1(s) = s - 1$$

è reale ma non è positiva, in quanto la condizione 1) del Teorema 2 non è verificata poiché

$$\operatorname{Re} F(j\omega) = -1 < 0.$$

b) La funzione F_2 data da

$$F_2(s) = \frac{s+3}{s^2 + 4s - 15}$$

è reale, ma non è positiva, in quanto la condizione 2) del Teorema 2 non è verificata. Infatti il denominatore, per la regola di Cartesio[3], ha una radice reale positiva e quindi F_2 ha necessariamente un polo in $\operatorname{Re} s > 0$, essendo numeratore e denominatore primi tra loro.
c) La funzione F_3 data da

$$F_3(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

è reale, ma non positiva, in quanto $s = 0$ è un polo doppio e quindi la condizione 3) non è verificata.
d) La funzione F_4 data da

$$F_4(s) = \frac{s^2 + 4}{s^3 + s}$$

è reale, ma non positiva, in quanto la condizione 3) non è verificata. Infatti i poli di F_4 sono $s = 0$, $s = \pm j$; stanno tutti sull'asse immaginario e si ha

$$\operatorname{Res}[F, j] = \lim_{s \to j} (s - j) F_4(s) = \left. \frac{s^2 + 4}{s(s+j)} \right|_{s=j} = -\frac{3}{2} < 0.$$

Si osservi poi che F_4 verifica le altre condizioni del Teorema 2. Infatti

$$F_4(j\omega) = \frac{4 - \omega^2}{-j\omega^3 + j\omega} = j\frac{4 - \omega^2}{\omega^3 - \omega}$$

[3]Ricordiamo che in un trinomio di 2^o grado completo a coefficienti reali ad ogni permanenza corrisponde una radice con parte reale negativa e ad ogni variazione una radice con parte reale positiva. Il trinomio $s^2 + 4s - 15$ ha una permanenza ed una variazione e quindi una radice (reale) negativa ed una radice (reale) positiva.

e quindi

$$\operatorname{Re} F_4(j\omega) = 0$$

ossia 1) è soddisfatta. Inoltre 2) è ovviamente verificata e lo stesso accade per 4) in quanto F_4 non ha un polo all'infinito.
e) La funzione F_5 data da

$$F_5(s) = s^2 + 3s + 1$$

è reale, ma non positiva, in quanto ha un polo doppio all'infinito (e quindi 4) non è verificata).
f) La funzione F_6 data da

$$F_6(s) = -5s + 2 + \frac{1}{s}$$

è reale, ma non positiva, in quanto $c_1 = -5$ (e quindi, anche in questo caso, 4) non è verificata).

Completiamo questo paragrafo con altri esempi di funzioni reali positive.

Esempio 9. Verificare che la funzione F data da

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s + 1}$$

è reale positiva.

Tale funzione ha un unico polo in $s = -1$. Pertanto le condizioni 2) e 3) sono verificate. Per quanto riguarda la condizione 1), si ha

$$F(j\omega) = \frac{(1 - \omega^2) + j\omega}{1 + j\omega};$$

moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore si ottiene

$$F(j\omega) = \frac{[(1 - \omega^2) + j\omega][1 - j\omega]}{[1 + j\omega][1 - j\omega]} = \frac{1}{1 + \omega^2} + j\frac{\omega^3}{1 + \omega^2}$$

e quindi

$$\operatorname{Re} F(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} > 0 :$$

la condizione 1) è pertanto soddisfatta. Per quanto riguarda infine la condizione 4), è immediato riconoscere che F ha un polo semplice all'infinito. Effettuando poi la divisione tra numeratore e denominatore (ad esempio con la regola di Ruffini!) si ottiene

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s + 1} = \underbrace{s}_{(+)} + \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{(*)}.$$

La funzione $(*)$ ha uno zero all'infinito e quindi il suo sviluppo in serie di Laurent all'infinito contiene soltanto potenze della variabile s ad esponente negativo. In altri termini la parte principale dello sviluppo di Laurent (all'infinito) della funzione $(*)$ è nulla. L'unico coefficiente del termine "s" è quello che compare in $(+)$: pertanto, in questo caso, $c_1 = 1$ e quindi anche la condizione 4) è verificata.

L'esempio precedente suggerisce anche un procedimento alternativo per la verifica della condizione 1) del Teorema 2. Vale infatti il seguente:

Lemma 1. *Sia F una funzione razionale reale*

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

Allora per ogni numero complesso $s = j\omega$ appartenente al dominio di F le seguenti condizioni sono equivalenti

i) $\operatorname{Re} F(j\omega) \geq 0$;

ii) $\operatorname{Re}[N(j\omega)D(-j\omega)] \geq 0$;

iii) $\operatorname{Re}[D(j\omega)N(-j\omega)] \geq 0$.

Dim. Senza perdere in generalità possiamo supporre che N e D siano a coefficienti reali. Si ha

$$F(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)};$$

moltiplicando numeratore e denominatore per $\overline{D(j\omega)}$[4] si ottiene

$$F(j\omega) = \frac{N(j\omega)\overline{D(j\omega)}}{|D(j\omega)|^2}.$$

[4] Sia z un numero complesso. Con $\overline{z}$ si intende il coniugato.

Poiché il polinomio D è a coefficienti reali, si ha

$$\overline{D(j\omega)} = D(\overline{j\omega}) = D(-j\omega)$$

e allora

$$F(j\omega) = \frac{N(j\omega)D(-j\omega)}{|D(j\omega)|^2} \tag{8}$$

e poiché il denominatore nel secondo membro di (8) è un numero reale, le condizioni i) ed iii) sono equivalenti.

L'equivalenza tra le condizioni ii) ed iii) si ottiene subito osservando che

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,[N(j\omega)D(-j\omega)] &= \mathrm{Re}\,[\overline{N(j\omega)D(-j\omega)}] \\ &= \mathrm{Re}\,[N(-j\omega)D(j\omega)].\end{aligned}$$

La dimostrazione è così completa. $\square$

Osservazione 3. L'esempio precedente suggerisce anche un procedimento immediato per la verifica della condizione 4) del Teorema 2. Infatti la funzione razionale $F = N/D$ ha all'infinito un polo semplice se e solo se

$$\mathrm{grado}\, N - \mathrm{grado}\, D = 1.$$

In questo caso per determinare il coefficiente c_1 (ossia il coefficiente di "s") nello sviluppo in serie di Laurent all'infinito è sufficiente considerare il rapporto tra i coefficienti dei monomi di grado massimo in N e D. In altri termini se

$$\begin{aligned}N(s) &= a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 \\ D(s) &= b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_0\end{aligned}$$

allora

$$c_1 = \frac{a_n}{b_{n-1}}.$$

Per giustificare tale affermazione è sufficiente effettuare la divisione tra i due polinomi N e D. Indicato con Q il polinomio quoziente e con R il polinomio resto, si ottiene

$$F(s) = Q(s) + \underbrace{\frac{R(s)}{D(s)}}_{(*)}$$

Poiché grado $R <$ grado D, lo sviluppo in serie di Laurent all'infinito della funzione $(*)$ è privo di potenze della variabile s ad esponente positivo. L'unico coefficiente del termine "s" compare nel quoziente Q. Poiché Q, com'è facile verificare, assume la forma

$$Q(s) = \frac{a_n}{b_{n-1}} s + k$$

con k costante opportuna, ne segue quanto sopra affermato.

Esempio 10. Verificare che la funzione F data da

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2s+1}{2s^2+2s}$$

è reale positiva.
Si ha

$$N(j\omega)D(-j\omega) = [2\omega j + 1][-2\omega^2 - 2j\omega]$$

e quindi

$$\mathrm{Re}\,[N(j\omega)D(-j\omega)] = 2\omega^2 \geq 0.$$

Pertanto, per il Lemma 1, la condizione 1) del Teorema 2 è verificata. Inoltre tale funzione ha due poli semplici in $s = 0$, $s = -1$ e $s = \infty$ è uno zero semplice. Pertanto le condizioni 2) e 4) del Teorema 2 sono verificate. Per quanto concerne la condizione 3), avendosi

$$\mathrm{Res}[F, 0] = \left.\frac{2s+1}{2s+2}\right|_{s=0} = \frac{1}{2} > 0$$

anch'essa risulta soddisfatta e quindi $F \in$ R.P.

1.5 Positività: Condizioni Necessarie

Dal Teorema 2 derivano immediatamente alcune condizioni necessarie per la positività. Vale infatti la seguente

Proposizione 4. *Sia*

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

una funzione razionale reale positiva. Allora *i)* $|\deg N - \deg D| \leq 1$ (9)

ii) $|\deg_{\min}{}^5 N - \deg_{\min} D| \leq 1$ (10)

iii) Supponiamo che N e D siano a coefficienti reali[6]*. Se N e D sono primi tra loro allora i coefficienti di N e D hanno tutti lo stesso segno.*

La verifica delle condizioni (9)–(10) è immediata: per evitare calcoli inutili, è consigliabile effettuare la verifica di tali condizioni, prima di applicare il Teorema 2. Per quanto poi riguarda la condizione iii) il consiglio è analogo: in questo caso però occorre **preliminarmente** verificare che N e D siano primi tra loro.

I seguenti esempi illustrano la Proposizione 4.

Esempio 11.
a) La funzione F data da

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^3 + 2s + 1}{s + 1}$$

non è R.P. in quanto $\deg N - \deg D = 2$.
b) La funzione F data da

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^4 + 4s^2 + 2}{s^3 + 3s^2}$$

non è R.P. in quanto $\deg_{\min} D - \deg_{\min} N = 2 - 0 = 2$.
c) La funzione F data da

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + s - 1}{s^2 + 1}.$$

verifica i) ed ii) della Proposizione 4; inoltre N e D sono primi tra loro e iii) non è soddisfatta. Pertanto F non è R.P.

La condizione iii) della Proposizione 4 richiede che numeratore e denominatore siano primi tra loro. Il seguente esempio illustra che tale ipotesi, in generale, non può essere eliminata.

[5]Sia P un polinomio: P è quindi somma di più monomi. Con il simbolo $\deg_{\min} P$ ("grado minimo di P") si intende il grado del monomio di grado più piccolo.

[6]Tale ipotesi non è restrittiva in quanto abbiamo supposto F reale e quindi, per il Teorema 1, esprimibile come rapporto di polinomi a coefficienti reali.

Esempio 12. Consideriamo la funzione F data da

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + 2s - 3}{s^2 - 1}.$$

Tale funzione è reale e inoltre le condizioni (9) – (10) sono soddisfatte. I coefficienti di N e D non hanno tutti lo stesso segno: però, prima di trarre conclusioni, occorre controllare se N e D siano primi tra loro oppure no. Nel primo caso, e solo in questo, potremo concludere, applicando la Proposizione 4 – iii), che F non è R.P.

Nel caso in esame F non è ridotta ai minimi termini in quanto

$$\frac{s^2 + 2s - 3}{s^2 - 1} = \frac{(s+3)(s-1)}{(s+1)(s-1)} = \frac{s+3}{s+1}.$$

Sia allora

$$F(s) = \frac{s+3}{s+1}; \tag{11}$$

per (11) le condizioni i), ii), iii) della Proposizione 4 sono soddisfatte. Applichiamo dunque il Teorema 2. La funzione F ha un polo semplice in $s = -1$ ed è regolare in $s = \infty$. Pertanto le condizioni 2), 3), 4) sono verificate. Per quanto riguarda la condizione 1), avendosi

$$F(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{j\omega + 1} = \frac{(j\omega + 3)(1 - j\omega)}{1 + \omega^2}$$

ne segue

$$\operatorname{Re} F(j\omega) = \frac{3 + \omega^2}{1 + \omega^2} > 0;$$

quindi 1) è verificata ed F è R.P.

Verificare che numeratore e denominatore siano primi tra loro può non essere immediato, in particolare quando i polinomi coinvolti sono di grado elevato. In tal caso però è sempre possibile renderli primi utilizzando l'algoritmo di Euclide, che qui, per completezza, riportiamo.

1.6 Algoritmo di Euclide

Tale algoritmo, noto anche con il nome di procedimento delle divisioni successive, consente di calcolare il massimo comun divisore (M.C.D.) di due polinomi e quindi, indirettamente, consente anche di rendere primi due polinomi che non lo siano[7].

Dati due polinomi N e D, con $\deg N \geq \deg D$, effettuiamo la divisione e sia Q_1 il polinomio quoziente e R_1 il polinomio resto:

$$\begin{array}{r|l} N(s) & \ \ D(s) \\ \cline{2-2} R_1(s) & \ \ Q_1(s) \end{array}$$

Allora $\deg D > \deg R_1$ ed è quindi possibile dividere D per R_1; siano allora Q_2 e R_2 rispettivamente i nuovi polinomi quoziente e resto:

$$\begin{array}{r|l} D(s) & \ \ R_1(s) \\ \cline{2-2} R_2(s) & \ \ Q_2(s) \end{array}$$

Si avrà $\deg R_1 > \deg R_2$. Ripetendo di nuovo la divisione tra R_1 e R_2 si ottiene un nuovo quoziente ed un nuovo resto, di grado inferiore a R_2. Possiamo perciò iterare il procedimento finché non si ottiene per resto un polinomio R_k di grado zero:

$$\deg R_k = 0.$$

Due casi sono allora possibili

a) $R_k(s) = c \neq 0$;

b) $R_k(s) \equiv 0$.

Nel caso a) i due polinomi N e D sono primi tra loro; nel caso b) N e D non sono primi e il loro massimo comun divisore è dato dal resto della divisione immediatamente precedente, ossia

$$R_k(s) \equiv 0 \Rightarrow \text{M.C.D.}(N, D) = R_{k-1}(s).$$

In tal caso, a questo punto, è immediato rendere N e D primi tra loro: sarà infatti sufficiente dividere N e D per il M.C.D. trovato.

Un esempio di applicazione del procedimento ora illustrato è il seguente:

[7] Questo algoritmo è sostanzialmente equivalente a quello visto a suo tempo per calcolare il M.C.D. di due numeri interi.

Esempio 13. Studiare la reale positività della funzione

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{36s^3 + 48s^2 + 21s + 3}{36s^3 + 42s^2 + 16s + 2}.$$

Verifichiamo per prima cosa se N e D sono primi tra loro calcolando il loro M.C.D.. Effettuando la divisione tra N e D si ottiene come quoziente il polinomio Q_1 dato da

$$Q_1(s) = 1$$

e come resto il polinomio R_1 dato da

$$R_1(s) = 6s^2 + 5s + 1.$$

Ripetendo di nuovo la divisione tra D e R_1 si ottiene come quoziente il polinomio Q_2 dato da

$$Q_2(s) = 6s + 2$$

e come resto il polinomio R_2 dato da

$$R_2(s) \equiv 0.$$

Pertanto N e D non sono primi tra loro e il loro M.C.D. è dato da

$$\text{M.C.D.}(N, D) = R_1(s) = 6s^2 + 5s + 1.$$

È possibile allora ridurre F ai minimi termini, dividendo numeratore e denominatore per R_1 ottenendo

$$F(s) = \frac{(s + \frac{1}{2})(6s^2 + 5s + 1)}{(s + \frac{1}{3})(6s^2 + 5s + 1)} = \frac{s + \frac{1}{2}}{s + \frac{1}{3}}.$$

Si ha allora

$$F(s) = \underbrace{\frac{s}{s + \frac{1}{3}}}_{(*)} + \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{s + \frac{1}{3}}}_{(+)}$$

La funzione $(*)$ è R.P. poiché lo è la sua reciproca

$$\frac{s + \frac{1}{3}}{s} = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{s}$$

in quanto somma di funzioni R.P.. Analoga conclusione vale per la funzione $(+)$, che è R.P. in quanto lo è la sua reciproca

$$\frac{s + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = 2s + \frac{2}{3}.$$

Pertanto F, essendo somma di funzioni R.P., è R.P..

1.7 Il Criterio di Talbot

La verifica della positività di una funzione razionale tramite il Teorema 2 richiede preliminarmente la determinazione dei poli della funzione e quindi, in ultima analisi, delle radici di un polinomio. Tale fatto può presentare notevoli difficoltà di natura algebrica[8], in modo particolare quando il polinomio è di grado elevato.

È possibile superare tale difficoltà, utilizzando la seguente condizione necessaria e sufficiente per la positività, condizione che, unita al test di Hurwitz più sotto richiamato, prescinde dalla determinazione effettiva delle radici dei polinomi coinvolti.
Vale il seguente:

Teorema 3 (di Talbot)**.** *Sia F la funzione razionale*

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove N e D sono polinomi primi tra loro e a coefficienti reali. Allora F è, ovviamente, reale ed inoltre è positiva se e solo se sono verificate le due condizioni:

i) $\operatorname{Re} F(j\omega) \geq 0$
per ogni numero complesso immaginario puro $j\omega$ appartenente al dominio di definizione di F;

ii) il polinomio $N + D$ non ha zeri in $\operatorname{Re} s \geq 0$*.*

1.8 Il Test di Hurwitz

Il criterio di Talbot richiede, tra l'altro, che un determinato polinomio abbia tutte le radici con parte reale negativa. Ciò può essere verificato tramite il test di Hurwitz, qui brevemente richiamato.

TEST DI HURWITZ
Sia P il polinomio

$$P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

[8]Ricordiamo che non esiste una "formula risolutiva per determinare le radici di polinomi di grado maggiore uguale a 5. Infatti è possibile dimostrare (Teorema di Ruffini) che le radici di un polinomio di grado $n \geq 5$ **non** possono essere ottenute (eccetto alcuni casi particolari) mediante un numero finito di operazioni razionali e/o estrazione di radice sui coefficienti.

dove i coefficienti a_i sono numeri reali. Supponiamo inoltre che $a_0 > 0$ (a questo caso ci si può sempre ricondurre, eventualmente cambiando di segno tutti gli altri coefficienti). Si costruisca poi la matrice di ordine n (matrice di Hurwitz)

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

nella quale il primo elemento, ossia quello posto sulla prima riga e prima colonna è il coefficiente a_1; gli altri elementi si ottengono, in ogni riga, diminuendo di una unità, andando da sinistra a destra, i pedici dei coefficienti e, in ogni colonna, incrementando di due unità i pedici, andando dall'alto verso il basso (se qualche coefficiente manca, oppure il pedice assume un valore non compreso tra 0 e n, allora il corrispondente elemento della matrice di Hurwitz vale zero).
Ciò posto, **condizione necessaria e sufficiente** affinché tutte le radici di P abbiano parte reale negativa è che siano tutti positivi gli n minori principali

$$\begin{aligned} H_1 &= a_1 \\ H_2 &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \\ H_3 &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ H_n &= \det H. \end{aligned}$$

In particolare per $n = 2$, ossia per un polinomio della forma

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 \tag{12}$$

con $a_0 > 0$, la matrice di Hurwitz diviene

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix};$$

il polinomio (12) allora ha tutte le radici con parte reale negativa se $a_1 > 0$, $a_1 a_2 > 0$, il che implica la presenza di due permanenze nella successione dei coefficienti del polinomio (12): si ritrova così uno dei casi della ben nota "regola di Cartesio".

1.9 Esempi

Diamo ora alcuni esempi che illustrano il test di Hurwitz ed il criterio di Talbot precedentemente illustrati nei paragrafi 1.8 e 1.7 rispettivamente.

Esempio 14. Il polinomio P dato da

$$P(s) = s^4 + 2s^3 + 20s^2 + s + 3$$

ha tutte le radici con parte reale negativa. Infatti consideriamo la matrice di Hurwitz

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 20 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

i minori principali di H sono

$$H_1 = 2 > 0, \qquad H_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 20 \end{pmatrix} = 39 > 0,$$

$$H_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 20 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 27 > 0, \qquad H_4 = \det H = 81 > 0.$$

L'asserto segue allora dal test di Hurwitz.

Esempio 15. Studiare la positività della funzione razionale F data da

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^3 + 2s^2 + 4s + 1}{6s^3 + s^2 + 4s + 1}.$$

Per il polinomio N la matrice di Hurwitz è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed è immediato verificare che tutti i minori principali sono positivi: pertanto N ha tutte le radici con parte reale negativa. La matrice di Hurwitz associata al polinomio D è

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

in questo caso i minori principali di ordine 2 e 3 sono negativi e quindi, per il test di Hurwitz, D ha almeno una radice con parte reale nulla o positiva. È immediato poi verificare che D non può avere radici sull'asse immaginario in quanto l'equazione

$$D(j\omega) = -6\omega^3 j - \omega^2 + 4\omega j + 1 = 0$$

non è risolubile per nessun $\omega \in \mathbb{R}$. In conclusione D ha almeno una radice con parte reale positiva: tale radice è necessariamente un polo per F in quanto, come si è già visto, tutte le radici di N hanno parte reale negativa. Pertanto, per il Teorema 2, la funzione F non è positiva in quanto la condizione ii) non è soddisfatta.

Esempio 16. Studiare la reale positività di

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2s^3 + 2s^2 + 4s + 1}{s^3 + s^2 + 2s + 1}.$$

Tale funzione è certamente reale. Per quanto concerne la positività, osserviamo che le condizioni necessarie i), ii), iii), espresse dalla Proposizione 4 sono soddisfatte in quanto N e D sono primi tra loro. In questo caso non è agevole determinare i poli di F (oppure della reciproca $1/F$). Utilizziamo quindi il criterio di Talbot. Si ha

$$N(s) + D(s) = 3s^3 + 3s^2 + 6s + 2.$$

Per tale polinomio la matrice di Hurwitz è

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare che tutti i minori principali sono positivi. Pertanto, in virtù del test di Hurwitz, tutte le radici del polinomio $N + D$ hanno parte reale negativa e quindi la condizione ii) del Teorema 3 è soddisfatta. Per quanto riguarda poi la condizione i), per il Lemma 1, sarà sufficiente verificare che

$$\mathrm{Re}\,[N(j\omega)D(-j\omega)] \geq 0. \tag{13}$$

Con facili calcoli si ha che (13) è verificata se e solo se

$$2\omega^6 - 6\omega^4 + 5\omega^2 + 1 \geq 0. \tag{14}$$

Posto $\omega^2 = y$ dobbiamo allora verificare che la funzione

$$f(y) = 2y^3 - 6y^2 + 5y + 1$$

è non negativa in $[0, +\infty)$. Tale funzione ha sul semiasse reale positivo un unico punto di minimo:

$$y_{\min} = \frac{6 + \sqrt{6}}{6}$$

e poiché

$$f\left(\frac{6 + \sqrt{6}}{6}\right) > 0$$

ne segue che (14) è verificata e, di conseguenza, anche la condizione i) del Teorema 3. Pertanto la funzione F considerata è R.P..

Esempio 17. Studiare la reale positività di

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^3 + 3s^2 + 3s + 3}{s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 6s + 2}.$$

Tale funzione è reale. Inoltre è semplice verificare (ad esempio utilizzando l'algoritmo di Euclide) che i polinomi N e D sono primi tra loro. È possibile verificare la positività mediante il criterio di Talbot. Si ha

$$N(s) + D(s) = s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 9s + 5.$$

La matrice di Hurwitz associata è quindi la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

I minori principali sono

$$H_1 = 5, \qquad H_2 = \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 9 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \qquad H_4 = \det H.$$

Essi sono tutti positivi e quindi, per il test di Hurwitz, tutte le radici del polinomio $N + D$ hanno parte reale negativa: la condizione ii) del Teorema 3 è pertanto soddisfatta. Per quanto riguarda la condizione i), per il Lemma 1 sarà sufficiente verificare che

$$\mathrm{Re}\,[N(j\omega)D(-j\omega)] \geq 0. \tag{13}$$

Con facili calcoli si ha che (13) è verificata se e solo se

$$\omega^6 - 3\omega^4 + 6 \geq 0.$$

Procedendo come nell'esempio precedente è possibile mostrare che tale disuguaglianza è sempre soddisfatta. Di conseguenza anche la condizione i) del Teorema 3 è verificata e la funzione F è R.P..

Il criterio di Talbot richiede, preliminarmente, che numeratore e denominatore siano primi tra loro. In generale tale condizione non può essere rimossa, come mostra il seguente esempio.

Esempio 18. La funzione F data da

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^4 + 5s^2 + 4}{s^3 + s} \tag{15}$$

è R.P.. Infatti essa è reale e avendosi

$$F(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+4)}{(s^2+1)s} = \frac{s^2+4}{s} = s + \frac{4}{s}$$

F è positiva perché somma di funzioni positive.
In questo caso la condizione i) del Teorema 3 è verificata in quanto

$$\mathrm{Re}\,F(j\omega) = 0,$$

ma non la condizione ii), in quanto il polinomio

$$N(s) + D(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + s + 4$$

ha zeri sull'asse immaginario ($\pm j$). Il criterio di Talbot non può quindi essere applicato alla funzione F espressa da (15) e ciò è dovuto al fatto che la funzione considerata non è ridotta ai minimi termini.

1.10 Reti Elettriche e Funzioni R.P.

Nell'ambito della teoria delle reti elettriche gli elementi circuitali passivi ideali vengono suddivisi in resistori, induttori e condensatori. Tale classificazione dipende dalla reazione che tali componenti hanno quando si fornisce loro energia. Se l'energia è dissipata, l'elemento circuitale considerato si chiama *resistore*; se l'energia viene accumulata sotto forma di campo magnetico, l'elemento prende nome di *induttore*; se infine l'energia viene accumulata sotto la forma di campo elettrico, allora l'elemento si chiama *condensatore*[9].

Indicando rispettivamente con R, L, C la resistenza, l'induttanza e la capacità del resistore, dell'induttore e del condensatore, con v_R, v_L, v_C le tensioni ai capi di questi elementi circuitali e con i la corrente percorsa, si ha

$$\begin{aligned} v_R(t) &= R\,i(t) \\ v_L(t) &= L\,\frac{di(t)}{dt} \\ v_C(t) &= \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{16}$$

ove si è supposto il condensatore inizialmente scarico.

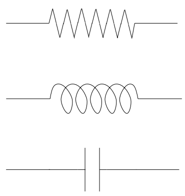
Trasformando secondo Laplace ambo i membri di (16) e indicando con V_R, V_L, V_C, I le rispettive trasformate, si ha

$$\begin{aligned} V_R(s) &= R\,I(s) \\ V_L(s) &= L\,s\,I(s) \\ V_C(s) &= \frac{1}{Cs}\,I(s) \end{aligned}$$

[9]Ricordiamo che tale classificazione ha un significato puramente ideale: nella realtà, infatti, un elemento circuitale presenta più di uno dei comportamenti citati, ma noi non ci occuperemo di ciò.

avendo supposto $i(0^+) = 0$.

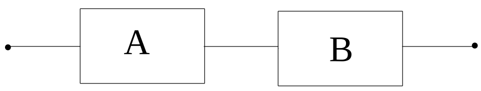
Com'è noto, il rapporto tra tensione e corrente prende il nome di impedenza; per tale motivo il rapporto tra le rispettive trasformate si chiamerà *impedenza complessa* e sarà indicato con la lettera Z. Analogamente il suo reciproco si chiamerà *ammettenza complessa* e sarà indicato con la lettera Y. Da (16) si ha allora



$$\begin{array}{ll} Z_R = R & Y_R = \dfrac{1}{R} \\ Z_L = Ls & Y_L = \dfrac{1}{Ls} \\ Z_C = \dfrac{1}{Cs} & Y_C = s\,C \end{array} \tag{17}$$

In generale una rete elettrica ideale passiva sarà costituita da diversi elementi circuitali collegati tra loro in vario modo. Esamineremo qui due tipi di collegamento: il collegamento in serie e il collegamento in parallelo.

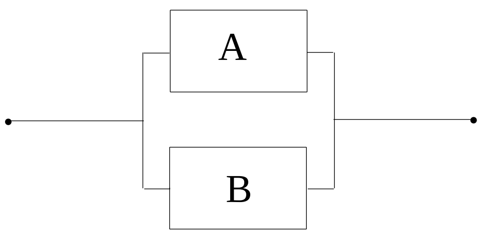
Supponiamo, per semplicità, che la rete sia composta da due soli blocchi, A e B. Se tali blocchi sono collegati in serie (vedi Figura 6) allora l'impedenza totale Z della rete è data dalla somma delle singole impedenze.



$$Z_{\mathrm{TOT}} = Z_{\mathrm{A}} + Z_{\mathrm{B}}. \tag{18}$$

Figura 6. *Collegamento in serie*

Se invece i due blocchi sono collegati in parallelo (vedi Figura 7) allora l'ammettenza totale Y della rete è data dalla somma delle singole ammettenze.



$$Y_{\mathrm{TOT}} = Y_{\mathrm{A}} + Y_{\mathrm{B}}. \tag{19}$$

Figura 7. *Collegamento in parallelo*

Ricordiamo poi il seguente risultato che è possibile dimostrare nell'ambito della teoria delle reti elettriche:

Teorema 4. *Una funzione razionale F può essere pensata come impedenza (complessa) o ammettenza (complessa) di una rete RCL passiva se e solo se F è reale positiva.*

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto quando una funzione razionale F è reale positiva. In caso affermativo allora è naturale chiedersi se sia possibile individuare una rete che ha come impedenza (complessa) o ammettenza (complessa) la funzione F assegnata. La risposta a tale quesito è affermativa e sarà vista, in ogni dettaglio, nell'ambito della Teoria delle reti elettriche. Daremo qui soltanto alcuni esempi che illustrano come sia possibile, in alcuni casi particolari, determinare una rete avente un'impedenza o ammettenza assegnate. Tale procedimento prende il nome di "*sintesi della rete*".

Esempio 19. Consideriamo la funzione Z data da

$$Z(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + 5s + 3}{s^2 + s + 1}. \tag{20}$$

Tale funzione è reale. Inoltre, come è immediato verificare, numeratore e denominatore sono primi tra loro. Per quanto riguarda la positività, utilizziamo allora il criterio di Talbot. Si ha

$$N(s) + D(s) = 2s^2 + 6s + 4$$

e quindi, per la ben nota regola di Cartesio, essendovi due permanenze, tutte le radici di $N + D$ hanno parte reale negativa: la condizione ii) del Teorema 3 è pertanto verificata. Per quanto concerne poi la condizione i), applicando il Lemma 1, essa è verificata se e solo se

$$\omega^4 + \omega^2 + 3 \geq 0.$$

Quest'ultima condizione è ovviamente soddisfatta per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ e allora (20) è reale positiva. Per il Teorema 4 Z può essere interpretata come impedenza di una rete RCL-passiva. Effettuiamo allora il procedimento di sintesi, determiniamo cioè una rete che ha (20) come impedenza.

Dividendo numeratore e denominatore, da (20) si ottiene

$$Z(s) = 1 + \frac{4s + 2}{s^2 + s + 1}.$$

Posto

$$Z_{\mathrm{A}} = 1, \qquad Z_{\mathrm{B}} = \frac{4s+2}{s^2+s+1},$$

abbiamo che l'impedenza (complessa) Z della rete cercata, è la somma di due impedenze, Z_{A} e Z_{B}. Tale rete pertanto sarà composta da due blocchi, A e B, collegati in serie (vedi Figura 8).

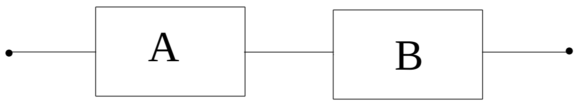


Figura 8.

Il blocco A, la cui impedenza è $Z_{\mathrm{A}} = 1$, è costituito, in virtù di (17), da un resistore avente resistenza 1 Ohm.
Per quanto concerne il blocco B, la sua ammettenza[10] è

$$Y_{\mathrm{B}} = \frac{s^2+s+1}{4s+2}.$$

Dividendo di nuovo numeratore e denominatore, si ottiene

$$Y_{\mathrm{B}} = \frac{1}{4}s + \frac{1}{8} + \frac{3/4}{4s+2}.$$

Posto

$$Y_{\mathrm{B1}} = \frac{1}{4}s, \qquad Y_{\mathrm{B2}} = \frac{1}{8}, \qquad Y_{\mathrm{B3}} = \frac{3/4}{4s+2},$$

si ha che l'ammettenza (complessa) Y_{B} del blocco B è data dalla somma di tre ammettenze, Y_{B1}, Y_{B2}, Y_{B3}. Il blocco B è pertanto composto da tre blocchi, B1, B2, B3, collegati in parallelo (vedi Figura 9).

[10] La funzione Z_{B} è una funzione propria. Per poter proseguire il procedimento delle divisioni successive occorre considerare la sua reciproca, ossia l'ammettenza Y_{B}.

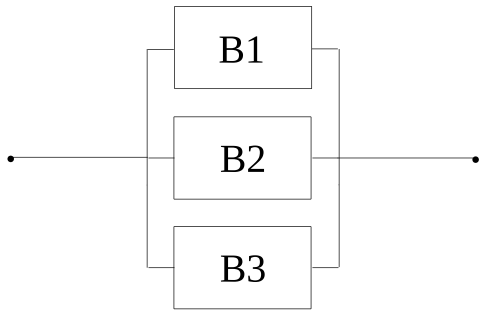


Figura 9. *Il blocco* B.

In virtù di (17), il blocco B1 è costituito da un condensatore di capacità 1/4 Farad e il blocco B2 da un resistore di resistenza 8 Ohm. Per quanto riguarda infine il blocco B3, procediamo come sopra, considerando la sua impedenza Z_{B3}. Avendosi

$$Z_{B3} = \frac{4s+2}{3/4} = \frac{16}{3}s + \frac{8}{3},$$

da (17) si ottiene facilmente che il blocco B3 è costituito da un induttore di induttanza 16/3 Henry e da un resistore di resistenza 8/3 Ohm collegati in serie.

In definitiva, una rete che ha la funzione (20) come impedenza è quella illustrata in Figura 10.

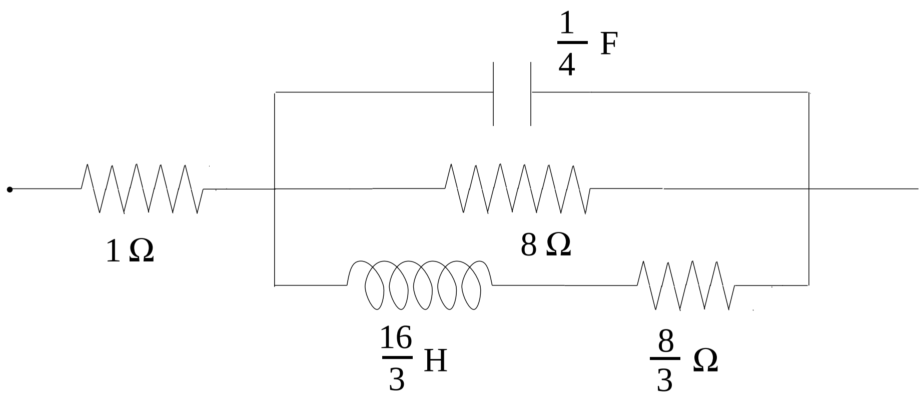


Figura 10. *Rete la cui impedenza è data da (20).*

Esempio 20. Consideriamo la funzione Y data da

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2+5s+6}{s+1}. \tag{21}$$

Tale funzione è reale ed è ridotta ai minimi termini. Per verificare la positività utilizziamo, anche in questo caso, il criterio di Talbot. Avendosi

$$N(s) + D(s) = s^2 + 6s + 6$$

tutte le radici di $N + D$ hanno parte reale negativa e pertanto la condizione ii) del Teorema 3 è soddisfatta. Avendosi poi

$$\mathrm{Re}\,[N(j\omega)D(-j\omega)] = 4\omega^2 + 6$$

per il Lemma 1 anche la condizione i) è verificata. Pertanto Y è reale positiva e, per il Teorema 4, tale funzione può essere interpretata come ammettenza di una rete RLC-passiva. Effettuiamo allora il procedimento di sintesi. Dividendo numeratore e denominatore si ottiene

$$Y(s) = s + 4 + \frac{2}{s+1}.$$

Pertanto l'ammettenza della rete cercata è la somma di tre ammettenze

$$Y_{\mathrm{A}}(s) = s, \qquad Y_{\mathrm{B}}(s) = 4, \qquad Y_{\mathrm{C}}(s) = \frac{2}{s+1}.$$

Tale rete sarà pertanto composta da tre blocchi, A, B, C, collegati in parallelo (vedi Figura 11).

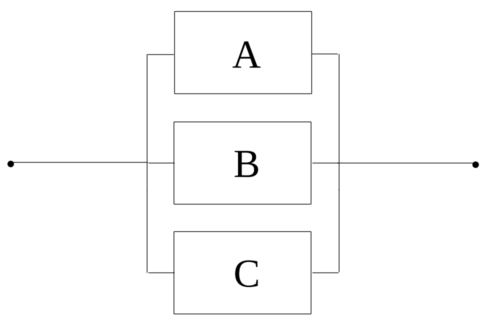


Figura 11.

In virtù di (17) il blocco A è costituito da un condensatore avente capacità 1 Farad e il blocco B da un resistore di resistenza 1/4 Ohm. Per quanto concerne il blocco C, avendosi

$$Z_{\mathrm{C}}(s) = \frac{1}{Y_{\mathrm{C}}(s)} = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}$$

esso risulta composto da un induttore di induttanza 1/2 Henry e da un resistore di resistenza 1/2 Ohm collegati in serie. In definitiva una rete avente come ammettenza la funzione (21) è quella illustrata in Figura 12.

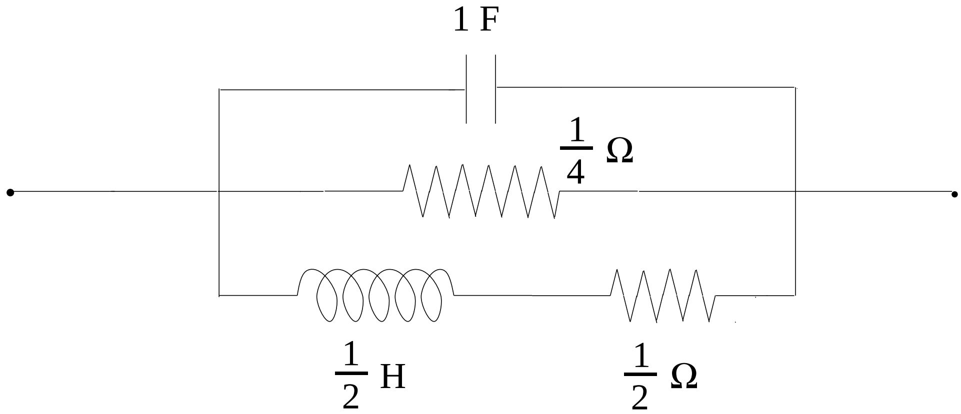


Figura 12. *Rete la cui ammettenza è data da (21)*

Il metodo di sintesi descritto nei due esempi precedenti, non è l'unico approccio utilizzabile per determinare una rete avente impedenza o ammettenza assegnata. Il seguente esempio illustra tale circostanza. Esso mette anche in luce che, in generale, non vi è corrispondenza biunivoca tra funzioni impedenza (o ammettenza) e reti RCL-passive, nel senso che ad una stessa funzione impedenza (o ammettenza) possono corrispondere reti diverse.

Esempio 21. La funzione

$$Z(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{s + 1} \tag{22}$$

è reale positiva: la realtà è ovvia. Per quanto concerne la positività essa segue facilmente dal Teorema 2 oppure dal Teorema 3. Pertanto (22) può essere pensata come impedenza di una rete RCL-passiva. Effettuando la divisione[11] si ha

[11]In questo caso occorre arrestare la divisione allorché il resto $(3s+2)$ ha lo stesso grado del divisore $(s+1)$. Infatti procedendo oltre con la divisione si otterrebbe un resto negativo e sarebbe quindi impossibile utilizzare i risultati precedenti, in particolare quelli espressi da (18)–(19).

$$
\begin{array}{cccc|l}
s^2 & +4s & +2 & & s+1 \\ \cline{5-5}
-s^2 & -s & & & s \\ \cline{1-4}
 & 3s & +2 & &
\end{array}
$$

Allora

$$Z(s) = s + \frac{3s+2}{s+1} = s + \frac{3s}{s+1} + \frac{2}{s+1}. \tag{23}$$

La rete cercata è perciò composta di tre blocchi A, B, C, collegati in serie, le cui impedenze sono date, rispettivamente, da

$$Z_{\mathrm{A}}(s) = s, \qquad Z_{\mathrm{B}}(s) = \frac{3s}{s+1}, \qquad Z_{\mathrm{C}}(s) = \frac{2}{s+1}.$$

Il blocco A (vedi Figura 13) è composto da un induttore di induttanza 1 Henry.

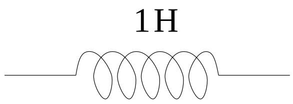


Figura 13. *Il blocco* A

Per quanto concerne il blocco B, la sua ammettenza è data da

$$Y_{\mathrm{B}}(s) = \frac{s+1}{3s} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3s}$$

e quindi, per (17), tale blocco è composto (vedi Figura 14) da un resistore di resistenza 3 Ohm e da un induttore di induttanza 3 Henry.

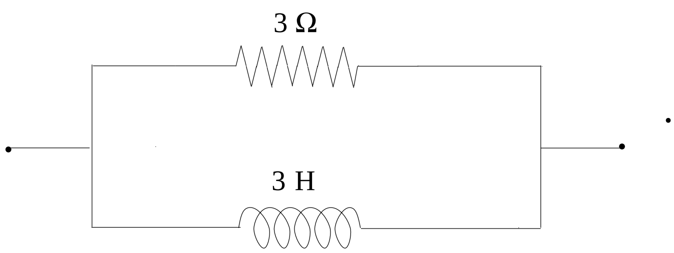


Figura 14. *Il blocco* B

Infine, per quanto concerne il blocco C, la sua ammettenza è data da

$$Y_{\mathrm{C}}(s) = \frac{s+1}{2} = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}$$

e quindi esso è composto (vedi Figura 15), in virtù di (17), da un condensatore di capacità 0.5 Farad e da un resistore di resistenza 2 Ohm.

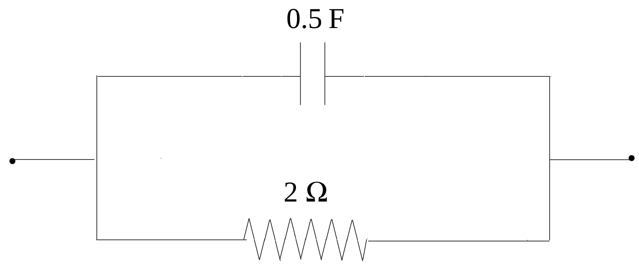


Figura 15. *Il blocco* C

Pertanto una rete avente come impedenza la funzione (22) decomposta come in (23) è rappresentata in Figura 16.

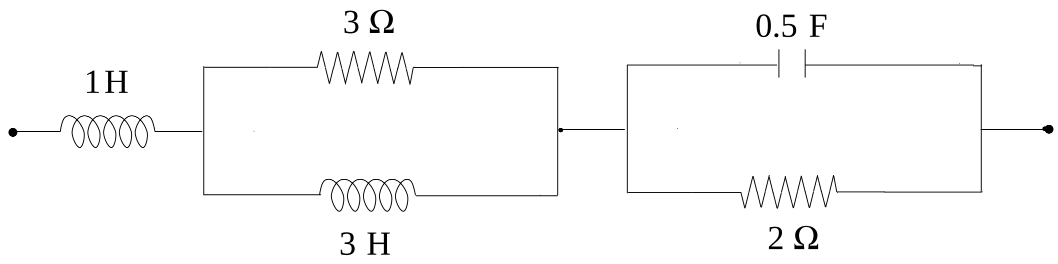


Figura 16. *Rete la cui impedenza è (22)–(23)*

Tuttavia la funzione Z data da (22) può essere decomposta anche nella forma seguente:

$$Z(s) = s + 2 + \frac{s}{s+1}. \tag{24}$$

In questo caso, la rete cercata è, come prima, composta da tre blocchi D, E, F, collegati in serie, le cui impedenze sono date, rispettivamente, da

$$Z_{\mathrm{D}}(s) = s, \qquad Z_{\mathrm{E}}(s) = 2, \qquad Z_{\mathrm{F}}(s) = \frac{s}{s+1}.$$

Pertanto il blocco D è composto da un induttore di induttanza 1 Henry, il blocco E da un resistore di resistenza 2 Ohm e il blocco F, avendosi

$$Y_{\mathrm{F}}(s) = \frac{s+1}{s} = 1 + \frac{1}{s}$$

è composto da un resistore di resistenza 1 Ohm e da un induttore di induttanza 1 Henry collegati in parallelo. Pertanto, decomponendo (22) nella forma (24), si ottiene la rete rappresentata in Figura 17.

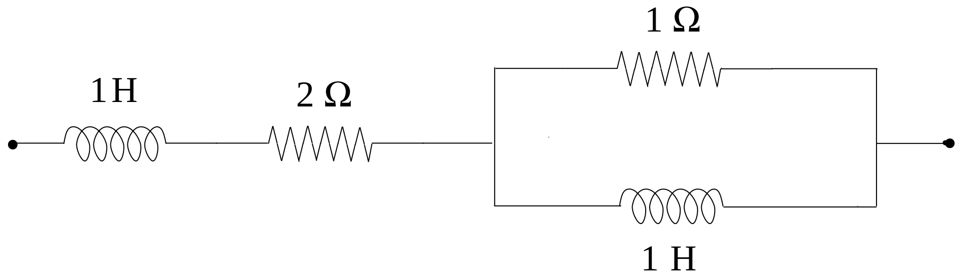


Figura 17. *Rete la cui impedenza è (22)–(24)*

Un altro pocedimento di sintesi, talvolta utilizzabile, consiste nella decomposizione in fratti semplici.

Esempio 22. La funzione Y data da

$$Y(s) = \frac{8s+22}{s^2+6s+8} \tag{25}$$

è reale positiva. Infatti si ha

$$Y(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{5}{s+4} \tag{26}$$

ed entrambi gli addendi di (26) sono funzioni R.P. in quanto lo sono le rispettive funzioni reciproche. Una rete avente (25) come ammettenza è composta perciò da due blocchi, A e B, collegati in parallelo, le cui ammettenze sono date, rispettivamente, da

$$Y_{\mathrm{A}}(s) = \frac{3}{s+2}, \qquad Y_{\mathrm{B}}(s) = \frac{5}{s+4}.$$

Considerando le rispettive funzioni reciproche, si ha allora

$$Z_{\mathrm{A}}(s) = \frac{1}{3}s + \frac{2}{3}, \qquad Z_{\mathrm{B}}(s) = \frac{1}{5}s + \frac{4}{5}.$$

Il blocco A pertanto è composto da un induttore di induttanza 1/3 Henry collegato in serie con un resistore di resistenza 2/3 Ohm e il blocco B da un induttore di induttanza 1/5 Henry collegato in serie con un resistore di resistenza 4/5 Ohm. La rete è rappresentata in Figura 18.

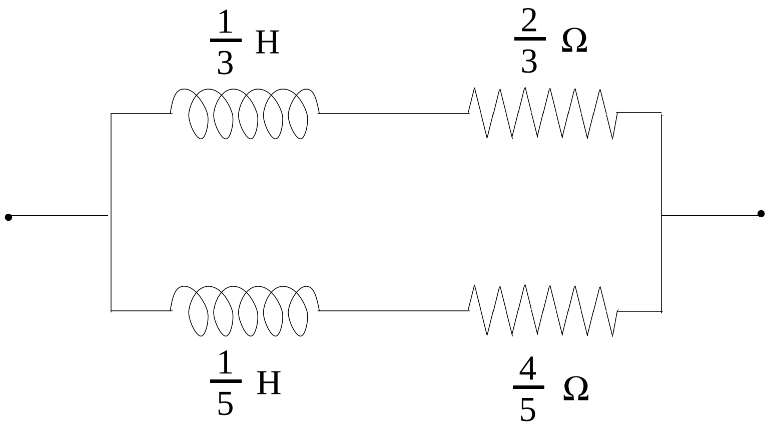


Figura 18. *Rete avente (25) come ammettenza*

Osservazione 4. Ovviamente l'approccio utilizzato nell'esempio precedente richiede che la funzione razionale sia propria. Ma non solo: occorre anche che essa abbia poli reali e che i residui in tali poli siano reali positivi per poter poi usare le formule (18)–(19).

Concludiamo questo paragrafo osservando che esistono classi di funzioni razionali R.P. per le quali nessuno dei procedimenti di sintesi illustrato negli esempi precedenti è utilizzabile. Un esempio di funzioni di questo tipo è dato dalla funzione

$$Z(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s}$$

È immediato verificare che tale funzione è R.P.. Infatti

$$\mathrm{Re}\,[N(j\omega)D(-j\omega)] = \omega^4 + \omega^2 \geq 0$$

e

$$\mathrm{Res}[Z, 0] = \frac{1}{2} > 0.$$

Dai Teoremi 1–2 e dal Lemma 1 si ha allora subito quanto sopra affermato. D'altra parte non è possibile utilizzare il metodo delle divisioni successive in quanto si otterrebbe

$$Z(s) = 1 + \underbrace{\frac{1-s}{s^2+2s}}_{(*)}$$

e $(*)$ non è una funzione R.P. poiché non tutti i coefficienti hanno lo stesso segno (Proposizione 4–iii)). Non è possibile procedere neppure decomponendo $(*)$ in fratti semplici, in quanto il Residuo di $(*)$ in $s = -2$ è negativo (esso vale $-3/2$). Infine, anche considerando la funzione reciproca

$$Y(s) = \frac{s^2+2s}{s^2+s+1}$$

si incontrano difficoltà dello stesso genere.

La sintesi di funzioni di questo tipo richiede un procedimento abbastanza sofisticato, procedimento che sarà visto nell'ambito della Teoria delle reti elettriche.

2 Il Caso Dispari: Generalità

Ricordiamo la seguente:

Definizione 3. *Sia F una funzione complessa di variabile complessa avente dominio di esistenza Ω simmetrico rispetto all'origine. La funzione F si dice* **pari** *se*

$$F(s) = F(-s) \qquad \forall s \in \Omega.$$

La funzione F si dice **dispari** *se*

$$F(s) = -F(-s) \qquad \forall s \in \Omega.$$

Ad esempio sono pari le funzioni

$$F_1(s) = s^2; \qquad F_2(s) = \cos s$$

e sono dispari le funzioni

$$F_3(s) = 5s^3; \qquad F_4(s) = \sin s.$$

Ogni funzione F definita in un insieme Ω simmetrico rispetto all'origine può essere sempre espressa come somma di una funzione pari ed una dispari. Infatti per ogni $s \in \Omega$ vale l'identità

$$F(s) = \underbrace{\frac{F(s) + F(-s)}{2}}_{(*)} + \underbrace{\frac{F(s) - F(-s)}{2}}_{(+)}$$

ed è immediato verificare che $(*)$ è pari e $(+)$ è dispari. La funzione $(*)$ si chiama *parte pari* di F e, similmente, $(+)$ *parte dispari* di F.
Ad esempio dato il polinomio

$$P(s) = 4s^4 + 6s^3 + 2s^2 + 5s + 1$$

la sua parte pari è

$$4s^4 + 2s^2 + 1$$

ossia è la somma di tutti i monomi di grado pari (zero compreso); la parte dispari di P è poi

$$6s^3 + 5s$$

ossia è la somma di tutti i monomi di grado dispari.

Per quanto concerne le operazioni razionali tra funzioni pari o dispari vale il seguente risultato, di immediata verifica:

Proposizione 5.

a) La somma (o differenza) di due funzioni entrambe pari o entrambe dispari è una funzione rispettivamente pari o dispari.

b) Il prodotto di due funzioni entrambe pari o entrambe dispari è una funzione pari.

c) Il prodotto di due funzioni, una pari e l'altra dispari, è una funzione dispari.

Il nostro interesse sarà limitato, come in precedenza, al caso razionale, in particolare al caso in cui F sia razionale dispari. Il motivo di ciò è dovuto all'importanza che tale classe di funzioni riveste nelle applicazioni alla teoria delle reti elettriche e un cenno di ciò sarà dato in un paragrafo successivo. Vale il seguente:

Teorema 5. *Sia F una funzione razionale. Allora F è dispari se e solo se F è esprimibile come rapporto di due polinomi uno pari e l'altro dispari.*

In virtù del risultato precedente, data la funzione F razionale, reale, dispari

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

non sarà restrittivo supporre N pari e D dispari, o viceversa. Supponendo inoltre F positiva ed indicando con n il grado di N e con m il grado di D, in virtù della Proposizione 4, dovrà necessariamente aversi

$$n = m + 1 \quad \text{oppure} \quad n = m - 1$$

il che implica, per la funzione F, l'esistenza di un polo semplice o di uno zero semplice all'infinito.

Un'altra proprietà delle funzioni razionali dispari è espressa dalla seguente

Proposizione 6. *Sia F una funzione razionale reale dispari. Allora sull'asse immaginario F assume valori immaginari puri, ossia*

$$\operatorname{Re} F(j\omega) = 0$$

per ogni punto $s = j\omega$ appartenente all'asse immaginario e al dominio di F.

Dim. Sia F data da

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

Per quanto visto in precedenza, non è restrittivo supporre N e D polinomi a coefficienti reali ed inoltre N dispari e D pari (in caso contrario sarà sufficiente considerare la funzione reciproca $1/F$). Assegnando allora alla variabile s valori puramente immaginari $j\omega$, il numeratore assume valori immaginari puri e il denominatore valori reali. L'asserto è allora immediato. □

2.1 Caso Dispari: la Positività

Una condizione necessaria per la positività di una funzione razionale reale dispari è espressa dalla seguente

Proposizione 7. *Sia F una funzione razionale dispari reale positiva. Allora gli eventuali zeri e poli di F sono situati sull'asse immaginario, sono semplici e si separano reciprocamente, ossia sono "alternati".*

Nelle Figure 19, 20, sono riportati gli zeri e i poli di una $F = N/D$ reale positiva dispari rispettivamente nei casi

$$\text{a)} \qquad \deg N = 3, \quad \deg N = 2$$

e

$$\text{b)} \qquad \deg N = 4, \quad \deg N = 3$$

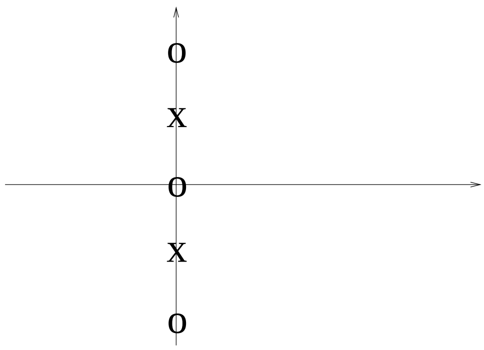


Figura 19. *Zeri* (o) *e poli* (x) *di una $F \in$ R.P. dispari [Caso a)]*

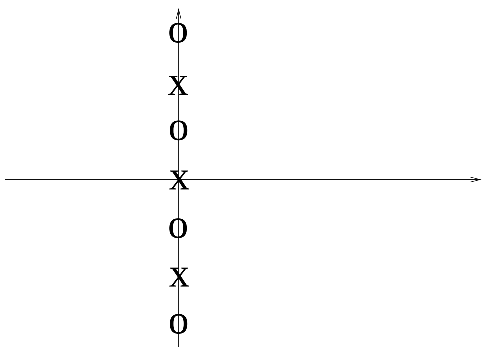


Figura 20. *Zeri* **(o)** *e poli* **(x)** *di una* $F \in$ *R.P. dispari [Caso b)]*

È immediato osservare che la condizione fornita dalla Proposizione 7 è necessaria, ma non sufficiente, per la positività. Infatti la funzione F data da

$$F(s) = \frac{-s^3 - 4s}{s^2 + 1}$$

è reale, ma non positiva in virtù della Proposizione 4 - iii). Eppure tale funzione è dispari, ha zeri ($s = 0$, $s = \pm 2j$) e poli ($s = \pm j$) soltanto sull'asse immaginario; inoltre tali zeri e poli sono semplici e "alternati".

Tale esempio tuttavia suggerisce come ottenere una condizione sufficiente per la positività dalla Proposizione 7. È possibile infatti provare il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione della parte sufficiente

Teorema 6. *Sia F una funzione razionale reale dispari. Supponiamo inoltre che tutti i coefficienti del numeratore e denominatore abbiano lo stesso segno. Allora F è positiva* **se e soltanto se** *gli eventuali zeri e poli di F sono situati sull'asse immaginario, sono semplici e si separano reciprocamente.*

Dim. La parte necessaria segue subito dalla Proposizione 7, la parte sufficiente è omessa. □

I seguenti esempi illustrano il precedente risultato.

Esempio 23. La funzione F data da

$$F(s) = \frac{s^3 + 6s}{s^2 + 4}$$

è reale positiva. Infatti F è dispari ed i coefficienti di numeratore e denominatore hanno tutti lo stesso segno (positivo). Gli zeri di F sono

$$s = 0, \quad s = \pm j\sqrt{6}$$

ed i poli

$$s = \pm 2j.$$

Zeri e poli sono semplici, stanno sull'asse immaginario e si separano reciprocamente: per il Teorema 6 allora la funzione F considerata è R.P.

Esempio 24. La funzione F data da

$$F(s) = \frac{s^4 + 3s^2 + 2}{s^3 + 4s} \tag{27}$$

è reale, ma non positiva. Infatti F è dispari ed i coefficienti di numeratore e denominatore hanno tutti lo stesso segno (positivo). Tuttavia gli zeri e i poli di F, tutti semplici e situati sull'asse immaginario, non si separano reciprocamente (vedi Figura 21).

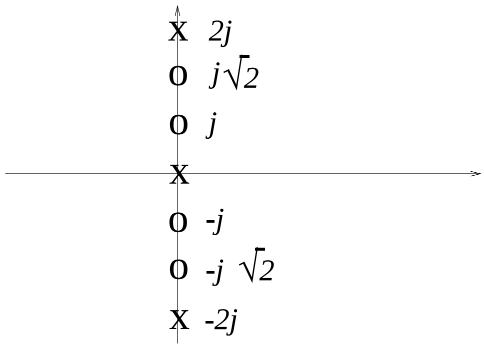


Figura 21. *Zeri* **(o)** *e poli* **(x)** *di (27)*

Infatti gli zeri sono

$$s = \pm j \qquad s = \pm j\sqrt{2}$$

ed i poli

$$s = 0, \qquad s = \pm 2j.$$

Pertanto, per il Teorema 6, la funzione (27) non è positiva. A titolo di esercizio verifichiamo lo stesso risultato utilizzando sia il Teorema 2 che il criterio di Talbot.

Si ha

$$\mathrm{Res}[F, 2j] = \left.\frac{s^4 + 3s^2 + 2}{s(s+2j)}\right|_{2j} = -\frac{3}{4} < 0$$

e quindi la condizione iii) del Teorema 2 non è verificata. Per quanto riguarda infine il criterio di Talbot il polinomio

$$N(s) + D(s) = s^4 + s^3 + 3s^2 + 4s + 2$$

non ha tutte le radici con parte reale negativa in quanto il minore principale di ordine 2 della matrice di Hurwitz associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è negativo.

2.2 Il Caso Dispari: l'Algoritmo delle Divisioni Successive

Il Teorema 6 fornisce una condizione necessaria e sufficiente per la positività di una funzione razionale reale dispari. Tale condizione è legata alla determinazione degli zeri e dei poli della funzione razionale considerata e, come già osservato, tale determinazione può non essere agevole nel caso in cui numeratore e denominatore siano di grado elevato.

Descriviamo ora un altro algoritmo che fornisce, anch'esso, una condizione necessaria e sufficiente per la positività e che prescinde dalla difficoltà sopra segnalata. Tale algoritmo va sotto il nome di metodo delle divisioni successive e, come vedremo, si rivela estremamente utile nelle applicazioni alla teoria delle reti elettriche.
Vale il seguente

Teorema 7. *Sia F una funzione razionale reale dispari*

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove N e D sono due polinomi, rispettivamente di grado n e m, a coefficienti reali, uno pari e l'altro dispari. Supponiamo che N e D siano primi tra loro ed inoltre che $n = m + 1$ (in caso contrario basterà applicare il procedimento alla funzione reciproca $1/F$). Allora la funzione F è positiva se e solo se, effettuato il procedimento delle divisioni successive descritto nel paragrafo 1.6, sono soddisfatte le seguenti condizioni:

i) il procedimento delle divisioni successive consta di m divisioni;

ii) il coefficiente del termine "s" in ciascun quoziente è positivo;

iii) l'ultimo resto è positivo.

Il seguente esempio illustra tale il metodo.

Esempio 25. Provare che la funzione F data da

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^5 + 8s^3 + 15s}{s^4 + 5s^2 + 4}$$

è reale positiva.
Tale funzione è certamente reale. Verifichiamo la positività utilizzando il Teorema 7. Effettuiamo il procedimento delle divisioni successive: dividendo N per D, si ottiene come quoziente il polinomio

$$Q_1(s) = s$$

e come resto

$$R_1(s) = 3s^3 + 11s.$$

Ripetendo la divisione, si ottiene come nuovo quoziente il polinomio

$$Q_2(s) = \frac{1}{3}s$$

e come resto

$$R_2(s) = \frac{4}{3}s^2 + 4.$$

Procedendo ulteriormente si ottiene

$$Q_3(s) = \frac{9}{4}s, \qquad R_3(s) = \frac{35}{4}s$$

ed infine

$$Q_4(s) = \frac{16}{105}s, \qquad R_4(s) = 4.$$

È immediato allora verificare che le condizioni i), ii), iii) del Teorema 7 sono soddisfatte e quindi F è positiva.

Se una almeno delle condizioni i), ii), iii) del Teorema 7 non è verificata, allora la funzione considerata non è R.P.. I seguenti esempi illustrano tale circostanza.

Esempio 26. La funzione F data da

$$F(s) = \frac{s^4 + 6s^2 + 7}{s^3 + 6s}$$

è reale, ma non positiva. Infatti numeratore e denominatore sono primi tra loro, ma effettuando il procedimento delle divisioni successive si ottiene come quoziente il polinomio

$$Q_1(s) = s$$

e come resto il polinomio costante

$$R_1(s) = 7.$$

Tale procedimento consta quindi di una sola divisione e per il Teorema 7, la funzione considerata non è R.P.. Allo stesso risultato si perviene osservando che zeri e poli di F non si separano e applicando il Teorema 6.

Esempio 27. La funzione F data da

$$F(s) = \frac{s^2 + 4}{s^3 + s}$$

è reale, ma non positiva. Per mostrare ciò, applichiamo alla funzione reciproca

$$\frac{s^3 + s}{s^2 + 4}$$

l'algoritmo delle divisioni successive. Si ottengono come quoziente e resto i polinomi

$$\begin{aligned} Q_1(s) &= s, \qquad & R_1(s) &= -3s \\ Q_2(s) &= -\frac{1}{3}s, \qquad & R_2(s) &= 4. \end{aligned}$$

Vi sono pertanto due divisioni, ma il coefficiente di s nel secondo quoziente non è positivo e quindi la condizione ii) del Teorema 7 non è verificata. Alla stessa conclusione si perviene utilizzando il Teorema 6 ed osservando che, in questo caso, zeri e poli di F non si separano.

Esempio 28. La funzione F data da

$$F(s) = \frac{s^2 - 1}{s}$$

è reale, ma non positiva. Ciò può essere subito dedotto dalla Proposizione 4 - iii). Tuttavia alla stessa conclusione si può pervenire effettuando la divisione tra numeratore e denominatore ed osservando che, in questo caso, il resto vale -1.

Concludiamo questo paragrafo segnalando una rappresentazione delle funzioni razionali dispari reali positive che discende immediatamente dall'algoritmo delle divisioni successive.

Sia F come nel Teorema 7 e, per semplicità, supponiamo $n = 4$, $m = 3$. Effettuiamo il procedimento delle divisioni successive: dividiamo N per D e siano Q_1 e R_1 rispettivamente il quoziente ed il resto. Allora

$$N(s) = D(s)Q_1(s) + R_1(s)$$

ossia

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q_1(s) + \frac{R_1(s)}{D(s)} = Q_1(s) + \cfrac{1}{\cfrac{D(s)}{R_1(s)}}. \tag{28}$$

Effettuiamo ora la seconda divisione, dividendo D per R_1 e siano Q_2 e R_2 rispettivamente il quoziente ed il resto. Allora

$$D(s) = R_1(s)Q_2(s) + R_2(s)$$

ossia

$$\frac{D(s)}{R_1(s)} = Q_2(s) + \frac{R_2(s)}{R_1(s)}.$$

Sostituendo in (28) si ha

$$F(s) = Q_1(s) + \cfrac{1}{Q_2(s) + \cfrac{R_2(s)}{R_1(s)}} = Q_1(s) + \cfrac{1}{Q_2(s) + \cfrac{1}{\cfrac{R_1(s)}{R_2(s)}}}.$$

Così procedendo, dopo la terza divisione, si perviene all'espressione

$$F(s) = Q_1(s) + \cfrac{1}{Q_2(s) + \cfrac{1}{Q_3(s) + \cfrac{R_3}{R_2(s)}}}. \tag{29}$$

Si vede facilmente che ciascun polinomio quoziente Q_i è del tipo

$$Q_i(s) = b_i s$$

e che la funzione razionale R_3/R_2 è del tipo

$$\frac{R_3}{R_2(s)} = \frac{1}{ks}.$$

Allora da (29) si ha

$$F(s) = b_1 s + \cfrac{1}{b_2(s) + \cfrac{1}{b_3(s) + \cfrac{1}{ks}}}$$

e la positività di F equivale al fatto che i coefficienti b_i, $i = 1, 2, 3$ e la costante k siano tutti positivi.

2.3 Esercizi - Funzioni R.P. Dipendenti da un Parametro

In questo paragrafo presentiamo alcuni esercizi relativi allo studio della positività di funzioni razionali dipendenti da un parametro.

Esercizio 1. Sia λ un parametro reale. Provare che la funzione F data da

$$F(s) = \frac{4s + \lambda + 1}{s^2 + s}$$

è R.P. se e solo se $\lambda \in [-1, 3]$.
Soluzione
La funzione F è reale. Vediamo se essa è ridotta ai minimi termini. Il denominatore si annulla per $s = 0$ e $s = -1$. In corrispondenza a tali valori, il numeratore si annulla se $\lambda = -1$ oppure se $\lambda = 3$.
Sia $\lambda = -1$; allora si ha

$$F(s) = \frac{4}{s+1}$$

e tale funzione è positiva poiché lo è la sua reciproca.
Sia $\lambda = 3$; allora

$$F(s) = \frac{4}{3}$$

che è, chiaramente, positiva.
Sia allora $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 3$. Essendo, in questo caso, numeratore e denominatore primi tra loro, per la Proposizione 4–iii) deve aversi

$$\lambda > -1. \tag{30}$$

Ciò premesso, utilizziamo il Teorema 2. Con facili calcoli si ha

$$\operatorname{Re} F(j\omega) \geq 0 \Longleftrightarrow 3\omega^2 - \lambda\omega^2 \geq 0$$

ossia

$$\operatorname{Re} F(j\omega) \geq 0 \Longleftrightarrow \lambda < 3.$$

Pertanto la condizione i) è verificata se e solo se

$$\lambda < 3. \tag{31}$$

Le condizioni ii) e iv) sono ovviamente soddisfatte. Per quanto concerne la condizione iii), si ha

$$\operatorname{Res}[F, 0] = \lambda + 1$$

e quindi otteniamo di nuovo la condizione (30). Da (30), (31) si ha allora l'asserto.

Esercizio 2. Sia λ un parametro reale. Provare che la funzione F data da

$$F(s) = \frac{s^4 + \lambda^2 s^2 + 3}{s^3 + s}$$

è R.P. se e solo se $|\lambda| \geq 2$.
Soluzione
La funzione F è reale e dispari. Procediamo come nell'esercizio precedente. Il denominatore si annulla per $s = 0$ e $s = \pm j$. In corrispondenza a tali valori il numeratore si annulla se $\lambda = \pm 2$.
Sia $|\lambda| = 2$; allora si ha

$$F(s) = \frac{s^2 + 3}{s} = s + \frac{3}{s}$$

che è R.P. perché somma di funzioni R.P..
Sia ora $|\lambda| \neq 2$ ed applichiamo di nuovo il Teorema 2. Essendo F dispari,

la condizione i) è verificata. Anche le condizioni ii) e iv) sono ovviamente soddisfatte. Per quanto riguarda infine la condizione iii) si ha

$$\mathrm{Res}[F,0] = 3$$
$$\mathrm{Res}[F,\pm j] = \frac{\lambda^2-4}{2}$$

e pertanto, in questo caso, F è R.P. se e solo se $|\lambda| > 2$.

Esercizio 3. Sia λ un parametro reale. Provare che la funzione F data da

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2-\lambda s+6}{\lambda^2 s^2+4s}$$

è R.P. se e solo se $\lambda \in [-\frac{2}{3}, 0]$.
Soluzione
La funzione F è reale.
Sia $\lambda = 0$. Allora si ha

$$F(s) = \frac{s^2+6}{4s} = \frac{1}{4}s + \frac{3}{2}\frac{1}{s}$$

che è R.P. perché somma di funzioni R.P..
Sia perciò $\lambda \neq 0$. Il denominatore si annulla per $s = 0$ e $s = -4/\lambda^2$. In corrispondenza al primo di questi valori, il numeratore non si annulla. Per quanto riguarda il secondo, si ha

$$N(-\frac{4}{\lambda^2}) = 0 \Longleftrightarrow 6\lambda^4 + 4\lambda^3 + 16 = 0.$$

Il polinomio

$$P(\lambda) = 6\lambda^4 + 4\lambda^3 + 16$$

ha un unico punto di minimo in $\lambda = -1/2$. Poiché

$$P(-\frac{1}{2}) > 0$$

ne segue che N e D sono primi tra loro. Per la Proposizione 4–iii) dovrà poi aversi

$$\lambda < 0.$$

Applichiamo il criterio di Talbot. Si ha

$$N(s) + D(s) = (1 + \lambda^2)s^2 + (4 - \lambda)s + 6.$$

Essendo λ negativo, per la regola di Cartesio, tutte le radici di $N + D$ hanno parte reale negativa e pertanto la condizione ii) è verificata. La condizione i) è poi verificata se e solo se

$$\lambda^2\omega^4 - 2\lambda\omega^2(2 + 3\lambda) \geq 0 \qquad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

ossia se e solo se

$$2 + 3\lambda \geq 0$$

e quindi l'asserto.