APPLICAZIONI di MATEMATICA
ESERCIZI parte 1

Numeri Complessi

ESERCIZIO 1.1 - Determinare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

$$3j; -2;\ 1+j;\ \ -1-j;\ 1+j\sqrt{3};\ 3-j\sqrt{3};\ \ -j\sqrt{5};$$
$$(1+j)(1-j); (1+j\sqrt{3})(-1+j);\ \ -2+5j.$$

Per ciascuno di tali numeri, si scriva il suo complesso coniugato in forma esponenziale.

ESERCIZIO 1.2 - Calcolare tutti i valori delle seguenti radici nel campo complesso:

$$\sqrt[3]{1};\ \sqrt[3]{j};\ \sqrt[4]{-1};\ \sqrt[6]{-8};\ \sqrt[2]{1-j};\ \sqrt[2]{5+5j};\ \sqrt[2]{5-5j};\ \sqrt[3]{-2+5j};$$
$$\sqrt[4]{3-j};\ \sqrt[2]{2+3j};\ \sqrt[5]{2+j};\ \sqrt[3]{2-2j};\ \sqrt[4]{3+3j};\ \sqrt[4]{-1-j\sqrt[2]{3}}.$$

ESERCIZIO 1.3 - Calcolare:

$$\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^8;\ \frac{(3+3j)^9}{j^6};\ \left(\frac{5j}{5+5j}\right)^9.$$

ESERCIZIO 1.4 - Risolvere le seguenti equazioni in campo complesso:

$$s^2+js+1=0;\ s^2+s+3=0;\ s^2+2s+j=0;\ s^3+s=0;$$
$$s^4+1=0;\ s^3+27=0;\ s^4+16s^2+24=0;\ s^4+j=0.$$

ESERCIZIO 1.5 - Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni complesse:

$$\begin{array}{llll} \sin s = 0; & \sin s = 1; & \cos s = 0; & \cos s = 1; \\ \exp(s) = 0; & \exp(s) = 1; & \exp(s) = j; & \exp(1/s) = 1; \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \sin(s + j) = 0; & \sin(s - j) = 1; & \cos(s + 2j) = 0; & \cos(s - \pi j) = 1; \\ \exp(-s) = 1; & \exp(-s) = 0; & \exp(1/s) = 2j; & \exp(1/2s) = 1; \end{array}$$

ESERCIZIO 1.6 - Determinare le regioni piane individuate dalle seguenti disuguaglianze:

$$\begin{array}{llll} \pi/8 \leq \arg s \leq \pi/3; & |s + 2 - 4j| \geq 1; & |s - 2| \leq 2; & |s + 1| = |s - 1|; \\ \operatorname{Im} s \leq 1; & \operatorname{Im} s = 2; & |s - 1 + 5j| < 1; & \operatorname{Re} s + \operatorname{Im} s < 0. \end{array}$$

ESERCIZIO 1.7 - Calcolare:

$$\log(-3); \;\; \log(j); \;\; \log(1 - j); \;\; \log(-1);$$
$$\exp(2\pi/j); \;\; \exp(4 + 4j); \;\; \exp(-1 + 2j).$$

Soluzioni di alcuni esercizi

ESERCIZIO 1.1 - Utilizzando la relazione tra forma algebrica e forma trigonometrica si ottiene ad esempio:

$|3j| = 3$, $\mathrm{Arg}(3j) = \pi/2$

$|-2| = 2$, $\mathrm{Arg}(-2) = \pi$

$|-1-j| = \sqrt{2}$, $\mathrm{Arg}(-1-j) = 5\pi/4$

$|-2+5j| = \sqrt{29}$, $\mathrm{Arg}(-2+5j) = \arctan(-5/2) + \pi$.

Essendo $(1+j)(1-j) = 2$ segue che $|(1+j)(1-j)| = 2$, $\mathrm{Arg}((1+j)(1-j)) = 0$.

Utilizzando poi le formule di De Moivre per il prodotto di numeri complessi si ottiene:
$|1+j\sqrt{3}| = 2$, $\mathrm{Arg}(1+j\sqrt{3}) = \pi/3$, $|-1+j| = \sqrt{2}$, $\mathrm{Arg}(-1+j) = 3\pi/4 \Rightarrow$ $|(1+j\sqrt{3})(-1+j)| = 2\sqrt{2}$, $\mathrm{Arg}((1+j\sqrt{3})(-1+j)) = \pi/3 + 3\pi/4 = 13\pi/12$.

Poiché il complesso coniugato ha stesso modulo e argomento opposto, risulta ad esempio:

$\overline{3j} = -3j = 3e^{-j\pi/2} = 3e^{j3\pi/2}$

$\overline{-1-j} = -1+j = \sqrt{2}e^{-j5\pi/4} = \sqrt{2}e^{j3\pi/4}$

$\overline{-2+5j} = -2-5j = \sqrt{29}\exp\{j(\arctan(5/2)-\pi)\} = \sqrt{29}\exp\{j(\arctan(5/2)+\pi)\}$.

ESERCIZIO 1.2 - Dalla formula per il calcolo delle radici, è sufficiente calcolare il modulo e l'argomento del radicando. Ad esempio:

$z^4 = -1 = e^{j\pi} \Rightarrow z_k = e^{j\pi/4+k\pi/2}, k = 0,1,2,3$, ossia: $z_0 = \sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2$, $z_1 = -\sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2$, $z_2 = -z_0$, $z_3 = -z_1$.

$z^3 = -2+5j = \sqrt{29}\,e^{j\alpha}$, dove $\alpha = \arctan(-5/2)+\pi \Rightarrow z_k = \sqrt[6]{29}\,e^{j\alpha/3+2k\pi/3}, k = 0,1,2$.

$z^4 = -1-j\sqrt{3} = 2\,e^{j4\pi/3} \Rightarrow z_k = \sqrt[4]{2}\,e^{j\pi/3+k\pi/2}, k = 0,1,2,3$, ossia $z_0 = \sqrt[4]{2}/2(1+j\sqrt{3})$, $z_1 = \sqrt[4]{2}/2(-\sqrt{3}+j)$, $z_2 = -z_0$, $z_3 = -z_1$.

ESERCIZIO 1.3 - Usando le formule di De Moivre, o, equivalentemente la rappresentazione esponenziale dei numeri complessi, si ha:

$$\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^8 = \left(\frac{(1-j)^2}{2}\right)^8 = (e^{-j\pi/2})^8 = e^{-4j\pi} = 1$$

$$\frac{(3+3j)^9}{j^6} = 3^9\frac{(\sqrt{2}\,e^{j\pi/4})^9}{-1} = -3^9 2^{9/2}\,e^{j9\pi/4} = -3^9 16\sqrt{2}\,e^{j\pi/4} = -3^9 16(1+j)$$

$\left(\dfrac{5j}{5+5j}\right)^9 = \left(\dfrac{j}{1+j}\right)^9 = j(1+j)^{-9} = j(\sqrt{2}\, e^{j\pi/4})^{-9} = j2^{-9/2}\, e^{-j\pi/4} = \dfrac{j}{32}(1-$
$j) = \dfrac{1}{32}(1+j)$. Altro metodo: osservare che $\frac{j}{1+j} = (j+1)/2$.

ESERCIZIO 1.4 -
1) $s^2 + js + 1 = 0$: essendo $\sqrt{\Delta} = \pm j\sqrt{5}$ si ha $s = j(-1 \pm \sqrt{5})/2$
2) $s^2 + s + 3 = 0 \Rightarrow s = (-1 \pm j\sqrt{11})/2$
3) $s^2+2s+j = 0$: essendo $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{1-j} = \pm 2\sqrt[4]{2}\, e^{-j\pi/8}$ si ha $s = -1 \pm \sqrt[4]{2}\, e^{-j\pi/8}$
4) $s^3 + s = 0 \Rightarrow s = 0$, $s = \pm j$
5) $s^4 + 1 = 0 \Rightarrow s = \sqrt[4]{-1} \Rightarrow s = (\pm\sqrt{2} \pm j\sqrt{2})/2$, $s = (\mp\sqrt{2} \pm j\sqrt{2})/2$
6) $s^3 + 27 = 0 \Rightarrow s = 3(1 \pm j\sqrt{3})/2$, $s = -3$
7) $s^4 + 16s^2 + 24 = 0$: biquadratica. Posto $z = s^2$ risulta $z = -8 \pm 2\sqrt{10} \Rightarrow s = \pm j\sqrt{8 + 2\sqrt{10}}, s = \pm j\sqrt{8 - 2\sqrt{10}}$
8) $s^4 + j = 0 \Rightarrow s = e^{j(3\pi/8 + k\pi/2)}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

ESERCIZIO 1.5 -
Se $\alpha \in [-1, 1]$ allora le soluzioni complesse di $\sin s = \alpha$ e di $\cos s = \alpha$ sono tutte e sole le soluzioni reali. Dunque:
$\sin s = 0 \Rightarrow s = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\sin s = 1 \Rightarrow s = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\cos s = 0 \Rightarrow s = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\cos s = 1 \Rightarrow s = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\sin(s + j) = 0 \Rightarrow s = -j + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\sin(s - j) = 1 \Rightarrow s = j + \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\cos(s + 2j) = 0 \Rightarrow s = -2j + \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\cos(s - \pi j) = 1 \Rightarrow s = \pi j + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Dall'espressione del logaritmo complesso si ha:
$\exp(s) = 0$ impossibile
$\exp(s) = 1 \Rightarrow s = j2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\exp(s) = j \Rightarrow s = j(\pi/2 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\exp(1/s) = 1 \Rightarrow s = j/(2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$;
$\exp(-s) = 1 \Rightarrow s = j2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\exp(-s) = 0$ impossibile;
$\exp(1/s) = 2j \Rightarrow s = 1/(\ln 2 + j(\pi/2 + 2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\exp(1/2s) = 1 \Rightarrow s = j/(4k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.

ESERCIZIO 1.6 -
$\pi/8 \leq \arg s \leq \pi/3$: semicono delimitato dalle semirette passanti per l'origine e formanti con l'asse reale positivo un angolo pari a $\pi/8$ e $\pi/3$, contenute nel primo quadrante.
$|s + 2 - 4j| \geq 1$: esterno della circonferenza di centro $(-2, 4)$ e raggio 1, circonferenza compresa.
$|s - 2| \leq 2$: interno della circonferenza di centro $(2, 0)$ e raggio 2, circonferenza compresa.
$|s+1| = |s-1|$: asse del segmento che unisce i punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, ossia la retta $x = 0$: tutti i punti sull'asse immaginario.
$\mathrm{Im}\, s \leq 1$: semipiano chiuso $y \leq 1$.
$\mathrm{Im}\, s = 2$: retta $y = 2$.
$|s - 1 + 5j| < 1$: interno della circonferenza di centro $(1, -5)$ e raggio 1, circonferenza esclusa.
$Res + \mathrm{Im}\, s < 0$: semipiano aperto $y < -x$.

ESERCIZIO 1.7 -
$\ln(-3) = \ln 3 + j(\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
$\ln(j) = j(\pi/2 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
$\ln(1 - j) = (\ln 2)/2 + j(-\pi/4 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
$\ln(-1) = j(\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
$\exp(2\pi/j) = \exp(-2\pi j) = 1$
$\exp(4 + 4j) = e^4 (\cos 4 + j \sin 4)$
$\exp(-1 + 2j) = (\cos 2 + j \sin 2)/e$.