# APPLICAZIONI di MATEMATICA
ESERCIZI parte 2

## 1 Funzioni complesse - generalità

**ESERCIZIO 2.1 -** Determinare parte reale e parte immaginaria delle seguenti funzioni complesse di variabile complessa:

$$\begin{array}{lll} s^2+3s-j; & s+5s^2; & 1/(s-j); \\ js+1/s; & 4\overline{s}+\exp(s); & |s|+j; \\ |s|s+j; & s\exp(-4s); & \overline{s}+|2js|; \\ |s|-s; & 4\overline{s}\exp(s); & -s\overline{s}+j. \end{array}$$

**ESERCIZIO 2.2 -** Stabilire se le seguenti funzioni complesse sono analitiche, oppure no:

$$\begin{array}{lll} 2(s+s\overline{s}); & s\exp(-4s); & |s|+js; \\ e^s-e^{2s}; & 4\overline{s}\exp(s); & 4s\overline{s}; \\ (s+1)e^s; & 4s^2\exp(s); & s/(1+|s|); \\ s-|s|; & js\sin(2s); & j(|s|+s). \end{array}$$

**ESERCIZIO 2.3 -** Determinare, se esistono, le funzioni $F = F(s)$ analitiche tali che

$$\begin{array}{ll} a)\,\mathrm{Re}\,F(s)=3(x^2-y^2) & b)\,\mathrm{Re}\,F(s)=-y^3+9x^2; \\ c)\,\mathrm{Im}\,F(s)=y; & d)\,\mathrm{Re}\,F(s)=x^2+4x-y^2; \\ e)\,\mathrm{Im}\,F(s)=x^2+2x-y^2; & f)\,\mathrm{Im}\,F(s)=x^2+y^2; \\ g)\,\mathrm{Re}\,F(s)=\mathrm{Re}\,s+\mathrm{Im}\,s; & h)\,\mathrm{Re}\,F(s)=7xy+5x^2. \end{array}$$

## 2 Classificazione Singolarità

**Esercizio 3.1** - Classificare le singolarità delle funzioni razionali:

$$f_1(s) = \frac{s^2-1}{s^2+1}; \qquad f_2(s) = \frac{7s^3+6}{s^2+js+1}; \qquad f_3(s) = \frac{s-j}{s^2-1+2js}$$
$$f_4(s) = \frac{s^2-1}{s^3+6s^2+5s-12}; \qquad f_5(s) = \frac{js^4}{(s+1)^4}; \qquad f_6(s) = \frac{js^4}{s^4+1}.$$

**Esercizio 3.2** - Classificare le singolarità delle funzioni non razionali:

$$g_1(s) = \frac{s+1}{e^s(s-1)}; \qquad g_2(s) = \frac{s+1}{(e^s-1)s}; \qquad g_3(s) = \frac{s\,e^{1/s}}{s^2-9};$$
$$g_4(s) = \frac{\sin(1/s)}{s^2-5s}; \qquad g_5(s) = \frac{s^2+4s+3}{\sin s}; \qquad g_6(s) = \frac{s^2+4s+3}{e^s};$$
$$g_7(s) = \frac{\sin(2s)}{s^2-2s}; \qquad g_8(s) = \frac{\sin(2s)}{(s^2-2s)^2}; \qquad (*)\ g_9(s) = e^{1/s^2}\sin(s^2+5).$$

# Soluzioni degli esercizi

**ESERCIZIO 2.1** - Posto $s = x + jy$, $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$, risulta:
$f_1(s) = s^2 + 3s - j \Rightarrow u(x,y) = x^2 - y^2 + 3x$, $v(x,y) = 2xy + 3y - 1$
$f_2(s) = s + 5s^2 \Rightarrow u(x,y) = x + 5x^2 - 5y^2$, $v(x,y) = y + 10xy$
$f_3(s) = 1/(s-j) \Rightarrow u(x,y) = x/(x^2 + (y-1)^2)$, $v(x,y) = (1-y)/(x^2 + (y-1)^2)$
$f_4(s) = js + 1/s \Rightarrow u(x,y) = (-x^2y - y^3 + x)/(x^2 + y^2)$, $v(x,y) = (x^3 + xy^2 - y)/(x^2 + y^2)$
$f_5(s) = 4\overline{s} + \exp(s) \Rightarrow u(x,y) = 4x + e^x \cos y$, $v(x,y) = -4y + e^x \sin y$
$f_6(s) = |s| + j \Rightarrow u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v(x,y) = 1$
$f_7(s) = |s|s + j \Rightarrow u(x,y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$, $v(x,y) = y\sqrt{x^2 + y^2} + 1$
$f_8(s) = s\exp(-4s) \Rightarrow u(x,y) = e^{-4x}\,(x\cos(4y) + y\sin(4y))$, $v(x,y) = e^{-4x}\,(y\cos(4y) - x\sin(4y))$
$f_9(s) = \overline{s} + |2js| \Rightarrow u(x,y) = x + 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $v(x,y) = -y$
$f_{10}(s) = |s| - s \Rightarrow u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} - x$, $v(x,y) = -y$
$f_{11}(s) = 4\overline{s}\exp(s) \Rightarrow u(x,y) = 4e^x(x\cos y + y\sin y)$, $v(x,y) = 4e^x(-y\cos y + x\sin y)$
$f_{12}(s) = -s\overline{s} + j \Rightarrow u(x,y) = -x^2 - y^2$, $v(x,y) = 1$

**ESERCIZIO 2.2** -
$f_1(s) = 2(s + s\overline{s})$ NO. Infatti la parte reale e la parte immaginaria sono rispettivamente $u(x,y) = 2(x + x^2 + y^2)$, $v(x,y) = 2y$ e le condizioni di Cauchy Riemann ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$) non sono soddisfatte. Analogo procedimento va utilizzato per gli altri esercizi
$f_2(s) = s\exp(-4s)$ SI
$f_3(s) = |s| + js$ NO
$f_4(s) = e^s - e^{2s}$ SI
$f_5(s) = 4\overline{s}\exp(s)$ NO
$f_6(s) = 4s\overline{s}$ NO
$f_7(s) = (s+1)e^s$ SI
$f_8(s) = 4s^2\exp(s)$ SI
$f_9(s) = s/(1 + |s|)$ NO
$f_{10}(s) = s - |s|$ NO
$f_{11}(s) = js\sin(2s)$ SI
$f_{12}(s) = j(|s| + s)$ NO

**ESERCIZIO 2.3** -
*a)* $u(x,y) = 3(x^2 - y^2)$ è armonica ($u_{xx} + u_{yy} = 0$), dunque esiste $F$ analitica tale

che $\operatorname{Re} F = u$. Per determinare la parte immaginaria $v$ si utilizzano le formule di Cauchy-Riemann, ottenendo: $v_x = 6y$, $v_y = 6x$, da cui $v(x,y) = 6xy + c$, $c \in \mathbb{R}$. Segue quindi $F(x+jy) = 3(x^2-y^2)+j6xy+jc$. Poiché $F(x) = 3x^2+jc$, dall'unicità dell'estensione analitica otteniamo $F(s) = 3s^2 + jc$, $c \in \mathbb{R}$.
*b)* $u(x,y) = -y^3+9x^2$ non è armonica, dunque non esiste $F$ analitica t.c. $\operatorname{Re} F = u$.
*c)* $v(x,y) = y \Rightarrow F(s) = s + c$, $c \in \mathbb{R}$.
*d)* $u(x,y) = x^2 + 4x - y^2 \Rightarrow F(s) = s^2 + 4s + jc$, $c \in \mathbb{R}$.
*e)* $v(x,y) = x^2 + 2x - y^2 \Rightarrow F(s) = js^2 + 2js + c$, $c \in \mathbb{R}$.
*f)* $v(x,y) = x^2 + y^2$ non è armonica, dunque non esiste $F$ analitica t.c. $\operatorname{Im} F = v$.
*g)* $u(x,y) = x + y \Rightarrow F(s) = s(1-j) + jc$, $c \in \mathbb{R}$.
*h)* $u(x,y) = 7xy+5x^2$ non è armonica, dunque non esiste $F$ analitica t.c. $\operatorname{Re} F = u$.

**ESERCIZIO 3.1 -**
$f_1:$ $\pm j$ poli semplici; $\infty$ punto regolare;
$f_2:$ $-(\sqrt{5}+1)j/2, (\sqrt{5}-1)j/2$ poli semplici; $\infty$ polo semplice;
$f_3:$ $-j$ polo doppio; $\infty$ zero semplice;
$f_4:$ $-4, -3$ poli semplici; 1 sing. eliminabile; $\infty$ zero semplice;
$f_5:$ $-1$ polo quarto ordine; $\infty$ punto regolare;
$f_6:$ $\pm(\sqrt{2}/2) \pm j(\sqrt{2}/2)$ poli semplici; $\infty$ punto regolare.

**ESERCIZIO 3.2 -**
$g_1:$ 1 polo semplice; $\infty$ essenziale;
$g_2:$ 0 polo doppio; $2k\pi j, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, poli sempl.; $\infty$ sing. non isolata;
$g_3:$ 0 essenziale; $\pm 3$ poli semplici; $\infty$ zero semplice;
$g_4:$ 0 essenziale; 5 polo semplice; $\infty$ zero ordine 3;
$g_5:$ $k\pi, k \in \mathbb{Z}$, poli semplici; $\infty$ sing. non isolata;
$g_6:$ $\infty$ essenziale;
$g_7:$ 0 eliminabile; 2 polo semplice; $\infty$ essenziale;
$g_8:$ 0 polo semplice; 2 polo doppio; $\infty$ essenziale;
$g_9:$ 0 essenziale; $\infty$ essenziale. Infatti la funzione $e^{1/s^2}$ ha $s = 0$ singolarità essenziale, $s = \infty$ punto di regolarità, mentre la funzione $\sin(s^2 + 5)$ ha $s = \infty$ singolarità essenziale e $s = 0$ punto di regolarità.