APPLICAZIONI di MATEMATICA
ESERCIZI parte 3

1 Integrale in $\mathbb{C}$

Esercizio 1.1 - Per le funzioni razionali

$$f_1(s) = \frac{s^2-1}{s^2+1}; \qquad f_2(s) = \frac{7s^3+6}{s^2+4s+5}; \qquad f_3(s) = \frac{s}{s^2-1}$$
$$f_4(s) = \frac{3s-9}{s^3+6s^2+5s}; \qquad f_5(s) = \frac{s}{(s+j)^2}; \qquad f_6(s) = \frac{s}{s^2+j}.$$

calcolare

$$I = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma f_i(s)ds$$

dove $\gamma(t) = 2e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 1.2 - Per le funzioni non razionali

$$g_1(s) = \frac{s+1}{e^s(s-1)}; \qquad g_2(s) = \frac{e^s-1}{s(s-3)(s-6)}; \qquad g_3(s) = \frac{\sin s}{s^2-9s};$$
$$g_4(s) = \frac{\sin(1/s)}{s^2-5s}; \qquad g_5(s) = \frac{1-\cos s}{s^3-s^2}; \qquad g_6(s) = \frac{s^2+4s+3}{e^s};$$
$$g_7(s) = \frac{\sin(2s)}{s^2-2s}; \qquad g_8(s) = \frac{\sin(2s)}{(s^2-6s)^2}; \qquad g_9(s) = \frac{se^{1/s}}{s^2-9}.$$

calcolare :

$$I = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma g_i(s)ds$$

dove $\gamma(t) = 4e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 1.3 - Per le funzioni g_i definite nell'Esercizio 1.2, calcolare i seguenti integrali:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma [g_i(s) + s]ds$$
$$I_2 = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma [g_i(s) + \frac{1}{s}]ds$$
$$I_3 = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma [g_i(s) + \frac{\sin s}{s}]ds$$

dove $\gamma(t) = 4e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$.

2 Residuo all'infinito

Esercizio 2.1 - Per le funzioni di cui all'Esercizio 1.2, calcolare, se esiste, il Residuo all'infinito.

Esercizio 2.2 - Calcolare $\mathrm{Res}[f, 0]$ e $\mathrm{Res}[f, \infty]$ delle seguenti funzioni:

$$f_1(s) = \frac{\sin s}{s^2}; \qquad f_2(s) = \frac{\exp(1/s)}{s^2};$$
$$f_3(s) = \frac{\exp s}{s^2}; \qquad f_4(s) = s\cos(\frac{1}{s});$$
$$f_5(s) = \frac{5}{s}\cos 4s; \qquad f_6(s) = \exp(s);$$
$$f_7(s) = \cos 5s; \qquad f_8(s) = \frac{3}{s}\sin\frac{1}{s}.$$

Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.1.

f_1 ha singolarità al finito $\pm j$, poli semplici, entrambe interne a γ. $I = 0$.

f_2 ha singolarità al finito $-2 \pm j$, poli semplici, entrambe esterne a γ. $I = 0$.

f_3 ha singolarità al finito ± 1, poli semplici, entrambe interne a γ. $I = 1$.

f_4 ha singolarità al finito $0, -1, -5$, poli semplici; solo 0 e -1 sono interne a γ. $I = 6/5$.

f_5 ha singolarità al finito $-j$, polo doppio, interno a γ. $I = 1$.

f_6 ha singolarità al finito $\mp\sqrt{2}/2 \pm j\sqrt{2}/2$, poli semplici, entrambe interne a γ. $I = 1$.

Esercizio 1.2.

g_1 ha singolarità al finito 1, polo semplice, interna a γ. $I = 2/e$.

g_2 ha singolarità al finito 0, eliminabile e $3, 6$, poli semplici. Solo $0, 3$ sono interne a γ. $I = (1 - e^3)/9$.

g_3 ha singolarità al finito 0, eliminabile e 9, polo semplice. Solo 0 è interno a γ. $I = 0$.

g_4 ha singolarità al finito 0, essenziale e 5, polo semplice; $s = \infty$ è zero del terzo ordine. Dal secondo teorema dei residui $I = -\sin(1/5)/5$.

g_5 ha singolarità al finito 0, eliminabile e 1, polo semplice, entrambe interne a γ. $I = 1 - \cos 1$.

g_6 non ha singolarità al finito (è analitica in $\mathbb{C}$). $I = 0$.

g_7 ha singolarità al finito 0, eliminabile e 2, polo semplice, entrambe interne a γ. $I = (\sin 4)/2$.

g_8 ha singolarità al finito 0, polo semplice e 6, polo doppio. Solo 0 è interno a γ. $I = 1/18$.

g_9 ha singolarità al finito 0, essenziale e ± 3, poli semplici; $s = \infty$ è zero del primo ordine. Dal secondo teorema dei residui $I = 1$.

Esercizio 1.3.

$I_1 = I$ essendo $f(s) = s$ analitica all'interno di γ.

$I_2 = I + 1$ essendo $\operatorname{Res}[1/s, 0] = 1$ ($s = 0$ polo semplice).

$I_1 = I$ essendo $\operatorname{Res}[\sin s/s, 0] = 0$ ($s = 0$ eliminabile).

Esercizio 2.1.

g_1. $s = \infty$ essenziale. $\operatorname{Res}[g_1, \infty] = -\operatorname{Res}[g_1, 1] = -2/e$.

g_2. $s = \infty$ essenziale. $\operatorname{Res}[g_2, \infty] = -\operatorname{Res}[g_2, 0] - \operatorname{Res}[g_2, 3] - \operatorname{Res}[g_2, 6] = (2e^3 - e^6 - 1)/18$.

g_3. $s = \infty$ essenziale. $\operatorname{Res}[g_3, \infty] = -\operatorname{Res}[g_3, 0] - \operatorname{Res}[g_3, 9] = -(\sin 9)/9$.

g_4. $s = \infty$ zero del terzo ordine. $\operatorname{Res}[g_4, \infty] = 0$.

g_5. $s = \infty$ essenziale. $\operatorname{Res}[g_5, \infty] = -\operatorname{Res}[g_5, 0] - \operatorname{Res}[g_5, 1] = \cos 1 - 1$.

g_6. $s = \infty$ essenziale. $\operatorname{Res}[g_6, \infty] = 0$ non essendoci altre singolarità.

g_7. $s = \infty$ essenziale. $\operatorname{Res}[g_7, \infty] = -\operatorname{Res}[g_7, 0] - \operatorname{Res}[g_7, 2] = -(\sin 4)/2$.

g_8. $s = \infty$ essenziale. $\operatorname{Res}[g_8, \infty] = -\operatorname{Res}[g_8, 0] - \operatorname{Res}[g_8, 6] = (\sin 12)/108 - (1 + \cos 12)/18$.

g_9. $s = \infty$ zero di ordine 1. $\operatorname{Res}[g_9, \infty] = -1$.

Esercizio 2.2.

f_1. $s = 0$ polo semplice, $s = \infty$ essenziale. $\operatorname{Res}[f_1, 0] = 1 \Rightarrow \operatorname{Res}[f_1, \infty] = -1$.

f_2. $s = 0$ essenziale, $s = \infty$ zero doppio. $\operatorname{Res}[f_2, \infty] = 0 \Rightarrow \operatorname{Res}[f_2, 0] = 0$.

f_3. $s = 0$ polo doppio, $s = \infty$ essenziale. $\operatorname{Res}[f_3, 0] = 1 \Rightarrow \operatorname{Res}[f_3, \infty] = -1$.

f_4. $s = 0$ essenziale, $s = \infty$ polo semplice. $\operatorname{Res}[f_4, \infty] = 1/2 \Rightarrow \operatorname{Res}[f_4, 0] = -1/2$.

f_5. $s = 0$ polo semplice, $s = \infty$ essenziale. $\operatorname{Res}[f_5, 0] = 5 \Rightarrow \operatorname{Res}[f_5, \infty] = -5$.

f_6. $s = 0$ punto regolare, $s = \infty$ essenziale. $\operatorname{Res}[f_6, 0] = 0 \Rightarrow \operatorname{Res}[f_6, \infty] = 0$.

f_7. $s = 0$ punto regolare, $s = \infty$ essenziale. $\operatorname{Res}[f_7, 0] = 0 \Rightarrow \operatorname{Res}[f_7, \infty] = 0$.

f_8. $s = 0$ essenziale, $s = \infty$ zero doppio. $\operatorname{Res}[f_8, \infty] = 0 \Rightarrow \operatorname{Res}[f_8, 0] = 0$.

Alle stesse conclusioni si può giungere scrivendo gli sviluppi in serie di Laurent in 0 delle funzioni coinvolte, tenendo conto che il residuo in 0 è pari al coefficiente del termine $1/s$. Ad esempio:

$$\frac{\sin s}{s^2} = \frac{1}{s^2}\left(s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{5!} - \cdots\right) = \frac{1}{s} - \frac{s}{6} + \frac{s^3}{5!} - \cdots \Rightarrow \operatorname{Res}[f_1, 0] = 1.$$