APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2016-2017
ESERCIZI parte 4

1 Esercizi

Esercizio 1.1 - Calcolare il seguente integrale

$$\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma f_i(s)ds$$

dove $\gamma(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$ e

$$f_1(s) = \frac{s}{(e^{1/s}-1)(s-2)^4}; \qquad f_2(s) = \frac{\sin(1/s)}{(s-1)(s-5)}; \qquad f_3(s) = \frac{s(7s+1)}{(s-1)^2(s-2)}.$$

Soluzione:

$I_1 = -\operatorname{Res}[f_1, \infty] = 0$ in quanto $s = \infty$ è zero doppio per f_1.

$I_2 = -\operatorname{Res}[f_2, \infty] - \operatorname{Res}[f_2, 5]$. Poiché $s = \infty$ è zero triplo per f_2, si ha $\operatorname{Res}[f_2, \infty] = 0$. Pertanto

$$I_2 = -\operatorname{Res}[f_2, 5] = -\left.\frac{\sin(1/s)}{(s-1)}\right|_{s=5} = -\frac{\sin(1/5)}{4}.$$

$I_3 = -\operatorname{Res}[f_3, \infty] = \operatorname{Res}[h, 0]$, dove $h(u) = u^{-2}f_3(1/u)$, ossia

$$h(u) = \frac{(7+u)}{(1-u)^2(1-2u)u}.$$

Poiché $u = 0$ è polo semplice per h, si ottiene

$$\operatorname{Res}[h, 0] = \left.\frac{(7+u)}{(1-u)^2(1-2u)}\right|_{u=0} = 7.$$

Esercizio 1.2 - Determinare, se esistono le funzioni analitiche F tali che

$$\text{Re } F' = x - y. \tag{1}$$

Soluzione. Chiaramente, se F è analitica, allora lo è anche F' e pertanto la funzione in (1) deve essere armonica, il che può essere verificato immediatamente. Pertanto, per quanto visto, tali funzioni F esistono. Ricordando che

$$F'(s) = F'(x + jy) = u_x(x, y) + jv_x(x, y)$$

si ha allora

$$u_x(x, y) = x - y$$

e, dalla prima delle formule di Cauchy-Riemann anche

$$v_y(x, y) = x - y.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{x^2}{2} - xy + c(y) \\ v(x, y) &= xy - \frac{y^2}{2} + d(x), \end{aligned}$$

dove c [d] è una arbitraria funzione della sola variabile x [y]. Dalla seconda delle formule di Cauchy-Riemann si ottiene allora

$$u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

ossia

$$-x + c'(y) = -y - d'(x)$$

e quindi

$$-x + d'(x) = -y - c'(y). \tag{2}$$

Pertanto le due funzioni in (2) sono costanti, ossia

$$-x + d'(x) = -y - c'(y) = k_1.$$

Da qui si ottiene allora

$$d(x) = \frac{x^2}{2} + k_1 x + k_2, \quad c(y) = -\frac{y^2}{2} - k_1 y + k_3$$

e quindi

$$F(x+jy) = u(x,y) + jv(x,y) =$$
$$= \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} - k_1 y + k_3 + j\left(xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + k_1 x + k_2\right).$$

Poiché

$$F(x) = F(x+j0) = \frac{x^2}{2} + k_3 + j\left(\frac{x^2}{2} + k_1 x + k_2\right),$$

utilizzando il principio dell'unicità dell'estensione analitica, si ottiene

$$F(s) = \frac{s^2}{2} + k_3 + j\left(\frac{s^2}{2} + k_1 s + k_2\right). \tag{3}$$

E' immediato verificare che (3) soddisfa (1). Si osservi che F dipende da tre costanti reali, come era lecito attendersi dal momento che è stata assegnata la parte reale della derivata prima.

Allo stesso risultato si perviene anche procedendo nel modo seguente. Poniamo $F' = G$ e sia

$$A(x,y) = \operatorname{Re} G, \qquad B(x,y) = \operatorname{Im} G.$$

Allora

$$A(x,y) = x - y$$

e, utilizzando il procedimento visto a lezione, si ricostruisce la funzione $G(s)$. Poiché $G(s) = F'(s)$, una integrazione fornisce le funzioni F cercate.

Esercizio 1.3 - Ricordando che

$$\sinh s = \frac{e^s - e^{-s}}{2}, \quad \cosh s = \frac{e^s + e^{-s}}{2},$$

calcolare, se esistono, i seguenti residui:

$$\begin{array}{ll} 1)\operatorname{Res}[1/\sinh s, 0], & 2)\operatorname{Res}[\cosh s/\sinh s, 0] \\ 3)\operatorname{Res}[1/\sinh s, \infty], & 4)\operatorname{Res}[\cosh s - \sinh s, \infty] \\ 5)\operatorname{Res}[1/(\sinh s - \cosh s), 0], & 6)\operatorname{Res}[(2 - 2\cosh s)^{-1}, 0] \end{array}$$

Soluzione. 1) $s = 0$ polo semplice. $\operatorname{Res}[1/\sinh s, 0] = 1$.
2) $s = 0$ polo semplice. $\operatorname{Res}[\cosh s/\sinh s, 0] = 1$.

3) $s = \infty$ singolarità di accumulazione. $\mathrm{Res}[1/\sinh s, \infty]$ non esiste.
4) $s = \infty$ singolarità essenziale. $\mathrm{Res}[\cosh s - \sinh s, \infty] = 0$ non essendoci singolarità al finito.
5) $s = 0$ punto di regolarità. $\mathrm{Res}[1/(\sinh s - \cosh s), 0] = 0$.
6) $s = 0$ polo doppio. $\mathrm{Res}[(2 - 2\cosh s)^{-1}, 0] = 0$.

2 Esercizi "teorici"

Es. 1 - Per le seguenti funzioni calcolare, se esiste, il residuo all'infinito

$$f_1(s) = s - |s|; \;\; f_2(s) = s - 4\exp(2s^3)$$

Es. 2 - Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ avente una sola singolarità al finito in $s = 0$, di tipo essenziale. Sia inoltre $s = \infty$ uno zero triplo. Quanto vale $\mathrm{Res}[f, 0]$?

Es. 3 - Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}\, f = x^2 - y$; la funzione f è analitica?

Es. 4 - Stabilire se si può applicare il 2^o Teorema dei Residui alle funzioni

$$f_1(s) = \frac{\sin 7s}{s^2 + 9s + 8}; \;\; f_2(s) = \frac{\sin 7s}{(s^2 + 9s + 8)\exp(4s)};$$
$$f_3(s) = \frac{\exp(3s)}{(s^2 + 9s + 8)(\sin 7s)}$$

Es. 5 - Siano

$$F_1(s) = \frac{(s-5)(s-1)}{(s+7)(s+9)}; \quad F_2(s) = \frac{(s-5)(s-1)}{(s+7)(s+9)(s+11)}.$$

Le funzioni F_i sono sviluppabili in serie di Laurent in $s = -7$? E in $s = \infty$?

Es. 6 - Sia F una funzione razionale. Stabilire se sono sviluppabili in serie di Laurent all'infinito le funzioni

$$G_1(s) = F(s)/\sin s; \quad G_2(s) = F(s)/\exp(5s).$$

Es. 7 - Sia F una funzione razionale con $F(0) = 1$. Stabilire se sono sviluppabili in serie di Laurent in $s = 0$ le funzioni

$$G_1(s) = e^{1/s}F(s); \qquad G_2(s) = \frac{F(s)}{s};$$
$$G_3(s) = \frac{F(s)}{\sin(1/s)}; \qquad G_4(s) = e^{-1/s}F(s).$$

Es. 8 - Sia f una funzione analitica in tutto il piano complesso. Quanto vale $\text{Res}\,[f, \infty]$?

Es. 9 - Sia f una funzione analitica all'interno della circonferenza di centro l'origine e raggio 10. Sia poi $f(s) = 6s^2 - 9s + 1$ se $s \in \gamma(t) = 4e^{jt}, t \in [\pi, 3\pi/2]$. Calcolare $f(1)$ e $f(j)$.

Es. 10 - Sia g analitica in un intorno V di $s = 7$ e $g'(7) = 5j$. Calcolare

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{g(s)}{(s-7)^2} ds$$

dove γ è una circonferenza di centro $s = 7$ contenuta in V e percorsa in senso positivo.

Es. 11 - Ciascuna delle seguenti domande ha UNA E UNA SOLA RISPOSTA ESATTA. Si individui quale, giustificando la risposta.

▲ *Domanda n.1 - E' applicabile il 2^o Teorema dei Residui alla funzione*

$$F(s) = \frac{2 + e^{1/s}}{\sin s} \ ?$$

a) - No, perché F ha infinite singolarità.
b) - Sì, perché F è limitata
c) - No, perché $s = 0$ è sing. essenziale
d) - Sì, perché F non è razionale.

▲ *Domanda n.2 - Sia F priva di singolarità al finito e all'infinito. Quale delle seguenti affermazioni è vera?*
a) $F(0) = 0, F(1) = 1$
b) $F(0) = 1, F(1) = 0$
c) $F(0) = F(1)$
d) $F(0) = 0, F(\infty) = 1$

▲ *Domanda n.3 - Sia F una funzione razionale propria [i.e. $F = N/D$, con N e D polinomi tali che grado $N <$ grado D]. Sia poi $G(s) = 1/F(s)$. Allora:*

a) G ha almeno una singolarità essenziale
b) G ha almeno una singolarità polare
c) G ha almeno una singolarità non isolata
d) G è limitata.

3 Soluzioni degli esercizi "teorici"

Es. 1 - Per f_1: non esiste il Residuo all'infinito, essendo $s = \infty$ una singolarità di accumulazione (questo vale anche tutti i punti di $\mathbb{C}$). Per f_2: $s = \infty$ è una singolarità essenziale, dunque il residuo esiste, e vale 0 per il II teorema dei residui ($s = \infty$ è l'unica singolarità).
Es. 2 - $\text{Res}[f, 0] = -\text{Res}[f, \infty] = 0$.
Es. 3 - $u(x, y) = x^2 - y$ non è armonica, dunque f non è analitica.
Es. 4 - f_1 e f_2 hanno un numero finito di singolarità essendo funzioni razionali; dunque si può applicare il II teorema dei residui. f_3 ha infinite singolarità e dunque non si può applicare il II teorema dei residui a f_3.
Es. 5 - F_1 e F_2 sono funzioni razionali e dunque hanno solo un numero finito di singolarità che sono dunque tutte isolate. Pertanto per entrambe esiste lo sviluppo in serie di Laurent sia in $s = -7$ che in $s = \infty$.
Es. 6 - G_1 ha $s = \infty$ come singolarità di accumulazione e dunque non esiste lo sviluppo in serie di Laurent all'infinito. G_2 ha come singolarità tutte e sole le singolarità di F che sono in numero finito e dunque $s = \infty$ è singolarità isolata e lo sviluppo in serie di Laurent all'infinito esiste.
Es. 7 - Per G_1: $s = 0$ essenziale e lo sviluppo in serie di Laurent esiste in $s = 0$.
Per G_2: $s = 0$ polo semplice e lo sviluppo in serie di Laurent esiste in $s = 0$.
Per G_3: $s = 0$ di accumulazione e lo sviluppo in serie di Laurent non esiste in $s = 0$.
Per G_4: $s = 0$ essenziale e lo sviluppo in serie di Laurent esiste in $s = 0$.
Es. 8 - $\text{Res}[f, \infty] = 0$ per il II teorema dei residui.
Es. 9 - Per l'unicità dell'estensione analitica $f(s) = 6s^2 - 9s + 1 \ \forall s : |s| < 10$. Dunque $f(1) = -2$, $f(j) = -5 - 9j$.
Es. 10 - $I = c_1$ e $c_1 = f'(7)$ essendo f analitica in V. Dunque $I = 5j$.
Es. 11 - 1. a) - 2. c) - 3. b)