APPLICAZIONI di MATEMATICA
ESERCIZI parte 5

1 Trasformata Zeta

N.B. In tutti gli esercizi proposti gli indici n o k sono interi non negativi, ossia $n, k \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Esercizio 1. Quale o quali delle seguenti funzioni è una trasformata Zeta? In caso affermativo, calcolare il raggio di convergenza delle antitrasformate.

$$F_1(z) = \frac{e^z}{z+4}; \quad F_2(z) = \frac{e^{-z}}{z+4}; \quad F_3(z) = \frac{e^{1/z}}{z+4}; \quad F_4(z) = \frac{z^4+4z}{z+4}$$
$$F_5(z) = \frac{z+6}{z^4+4z}; \quad F_6(z) = \sin\frac{1}{z}; \quad F_7(z) = \frac{\sin z}{z}; \quad F_8(z) = \frac{z+2}{z-2}.$$

Esercizio 2. Calcolare l'antitrasformata Zeta delle seguenti funzioni razionali

$$F_1(z) = \frac{z+6}{z-6},\ F_2(z) = \frac{z+6}{z^2+4z+4},\ F_3(z) = \frac{z^3+1}{z^4+1},$$
$$F_4(z) = \frac{z+6}{z^2-16},\ F_5(z) = \frac{z+6}{z^2-6z+5},\ F_6(z) = \frac{3z^2+2z+1}{2z^2+z}.$$

Esercizio 3. Quale è il raggio di convergenza delle antitrasformate delle funzioni di cui all'Esercizio 2?

Esercizio 4. Calcolare la trasformata Zeta dei seguenti campionamenti

$$\begin{array}{cc} f_n = (-1)^n(n+1); & f_n = (n+4)\cos(5n); \\ f_n = ne^{7n}\sin 4n; & f_n = 2^n; \\ f_n = (-1)^n ne^{-8n}; & f_n = (-1)^n \sin n; \\ f_n = (-1)^n n\cos 6n; & f_n = (-1)^n 4^n \sin n. \end{array}$$

Esercizio 5. Calcolare la trasformata Zeta dei seguenti campionamenti

$$f_n = \begin{cases} e^{2n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \quad ; \quad f_n = \begin{cases} e^{-n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \pi & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$f_n = \begin{cases} 4n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 6 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \quad ; \quad f_n = \begin{cases} ne^{3n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$f_n = \begin{cases} 4n & \text{se } n = 5k, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad ; \quad f_n = \begin{cases} ne^{3n} & \text{se } n = 4k, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_n = \begin{cases} e^{2n} & \text{se } n = 3k, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad ; \quad f_n = \begin{cases} e^{-n} & \text{se } n = 7k, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Verificare poi il risultato ottenuto calcolando l'antitrasformata Zeta.

Esercizio 6. Per ciascuno dei campionamenti $\{f_n\}$ di cui all'Esercizio 5, calcolare il raggio di convergenza. Calcolare poi la trasformata Zeta delle seguenti convoluzioni

$$f_n * n; \quad f_{n-3} * e^n; \quad e^{7n} f_{n-5} * 1$$

e determinare il raggio di convergenza di tali convoluzioni, analizzando le singolarità della trasformata trovata.

Esercizio 7. A quale o quali delle antitrasformate di cui all'Esercizio 2 non è possibile applicare il Teorema del valore finale? Per ciascuna di tali trasformate si verifichi poi la proprietà del valore iniziale, i.e. calcolando f_0 mediante la formula di inversione.

Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1. Sono trasformate Zeta le funzioni F_3, F_5, F_6, F_8. Non lo sono le altre.
Il raggio di convergenza è dato da:
F_3: $R_f = 4$
F_5: $R_f = \sqrt[3]{4}$
F_6: $R_f = 0$
F_8: $R_f = 2$.

Esercizio 2. 1) $f_0 = 1$, $f_n = 2 \cdot 6^n$ per $n \geq 1$.
2) $f_0 = 0$, $f_n = (-1)^n(2n-3)2^{n-1}$ per $n \geq 1$.
3) $f_n = (-1)^k$ per $n = 4k+1$ e $n = 4k+4$, $f_n = 0$ altrimenti.
4) $f_0 = 0$, $f_n = 4^{n-2}(5+(-1)^n)$ per $n \geq 1$.
5) $f_0 = 0$, $f_n = (11 \cdot 5^{n-1} - 7)/4$ per $n \geq 1$.
6) $f_0 = 3/2$, $f_1 = 1/4$, $f_n = 3(-1)^n/2^{n+1}$ per $n \geq 2$.

Esercizio 3. 1) $R_f = 6$, 2) $R_f = 2$, 3) $R_f = 1$, 4) $R_f = 4$, 5) $R_f = 5$, 6) $R_f = 1/2$.

Esercizio 4.
1) $f_n = (-1)^n(n+1) \Rightarrow F(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$
2) $f_n = (n+4)\cos(5n) \Rightarrow F(z) = \dfrac{z^3\cos 5 - 2z^2 + z\cos 5}{(z^2 - 2z\cos 5 + 1)^2} + 4\dfrac{z^2 - z\cos 5}{z^2 - 2z\cos 5 + 1}$
3) $f_n = ne^{7n}\sin 4n \Rightarrow F(z) = \dfrac{ze^7 \sin 4(z^2 - e^{14})}{(z^2 - 2ze^7\cos 4 + e^{14})^2}$
4) $f_n = 2^n \Rightarrow F(z) = \dfrac{z}{z-2}$
5) $f_n = (-1)^n ne^{-8n} \Rightarrow F(z) = \dfrac{-ze^8}{(ze^8+1)^2}$
6) $f_n = (-1)^n n\cos 6n \Rightarrow F(z) = \dfrac{-z(z^2\cos 6 + 2z + \cos 6)}{(z^2 + 2z\cos 6 + 1)^2}$
7) $f_n = (-1)^n \sin n \Rightarrow F(z) = \dfrac{-z\sin 1}{z^2 + 2z\cos 1 + 1}$
8) $f_n = (-1)^n 4^n \sin n \Rightarrow F(z) = \dfrac{-4z\sin 1}{z^2 + 8z\cos 1 + 16}$

Esercizio 5.

$$1)\ f_n = \begin{cases} e^{2n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \Rightarrow F(z) = \frac{z^2}{z^2 - e^4}$$

$$2)\ f_n = \begin{cases} e^{-n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \pi & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \Rightarrow F(z) = \frac{e^2 z^2}{e^2 z^2 - 1} + \frac{\pi z}{z^2 - 1}$$

$$3)\ f_n = \begin{cases} 4n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 6 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \Rightarrow F(z) = \frac{2z(3z^2 + 4z - 3)}{(z^2 - 1)^2}$$

$$4)\ f_n = \begin{cases} ne^{3n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \Rightarrow F(z) = \frac{2z^2 e^6}{(z^2 - e^6)^2} + \frac{z}{z^2 - 1}$$

$$5)\ f_n = \begin{cases} 4n & \text{se } n = 5k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow F(z) = \frac{20z^5}{(z^5 - 1)^2}$$

$$6)\ f_n = \begin{cases} ne^{3n} & \text{se } n = 4k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow F(z) = \frac{4z^4 e^{12}}{(z^4 - e^{12})^2}$$

$$7)\ f_n = \begin{cases} e^{2n} & \text{se } n = 3k, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow F(z) = \frac{z^3}{z^3 - e^6}$$

$$8)\ f_n = \begin{cases} e^{-n} & \text{se } n = 7k, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow F(z) = \frac{z^7 e^7}{z^7 e^7 - 1}$$

Esercizio 6. $R_1 = e^2$, $R_2 = 1$, $R_3 = 1$, $R_4 = e^3$, $R_5 = 1$, $R_6 = e^3$, $R_7 = e^2$, $R_8 = 1/e$.
La trasformata della convoluzione è data dal prodotto delle trasformate; scrivere i prodotti e vedere se ci sono o meno semplificazioni. Ad esempio per la 1) si ha: $Z\{n * f_n\} = \dfrac{z^3}{(z^2 - e^4)(z-1)^2}$ e dunque $R = e^2$.

Esercizio 7. Il teorema del valore finale non è sicuramente applicabile alle antitrasformate di F_1, F_2, F_4 e F_5 essendo il raggio di convergenza $R > 1$. Per F_3 risulta $R = 1$ ma la successione antitrasformata non è convergente, dunque il teorema del valore finale non è applicabile anche in questo caso. Per F_6 risulta $R = 1/2$ e la successione antitrasformata converge esponenzialmente a zero, dunque è l'unico caso in cui il teorema del valore finale è applicabile.