

APPLICAZIONI di MATEMATICA

ESERCIZI parte 6

1 Trasformata di Laplace

Esercizio 1 - Si considerino le seguenti funzioni. Quale o quali è di classe Λ^1 ? (Si assuma che tali funzioni siano nulle per $t < 0$). In caso affermativo se ne determini l'ascissa di convergenza.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{-t^2}; & f_2(t) &= t^7 + 14t^6; \\ f_3(t) &= t \cos t; & f_4(t) &= e^t \cos t^2; \\ f_5(t) &= e^{t^2}(2 + \cos t); & f_6(t) &= t^{-4}; \\ f_7(t) &= t^{-1/2}. \end{aligned}$$

Esercizio 2 - Si calcoli l'ascissa di convergenza delle seguenti funzioni di classe Λ^1 . (Si assuma che tali funzioni siano nulle per $t < 0$)

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{-7t}; & f_2(t) &= t^7 e^{7t}; \\ f_3(t) &= t e^{-5t}; & f_4(t) &= t \sin t e^{-4t}; \\ f_5(t) &= e^{5t} \cos t; & f_6(t) &= t^4 \cos t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \begin{cases} 21 & \text{se } t \in [6, 15] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ; & g_2(t) &= \begin{cases} e^t \sin t & \text{se } t \in [\pi, 4\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ; \\ g_3(t) &= \begin{cases} e^{-t} \sin t & \text{se } t \in [2\pi, 5\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ; & g_4(t) &= \begin{cases} e^{-6t} & \text{se } t > 6 \\ e^{6t} & \text{se } t \in (0, 6) \end{cases} . \end{aligned}$$

Esercizio 3 - Quale o quali delle seguenti funzioni è di classe Λ^1 ? In caso affermativo se ne determini l'ascissa di convergenza.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t^{-2}u(t-2), & g_1(t) &= t^{-1/2}u(t-2) \\ f_2(t) &= t^{-2}u(t), & g_2(t) &= e^{-2t}t^{-1/2}u(t) \\ f_3(t) &= e^{-t}t^{-2}u(t), & g_3(t) &= e^t t^{-1/2}u(t-1). \end{aligned}$$

Soluzioni

Esercizio 1. Sono di classe Λ^1 le funzioni f_1, f_2, f_3, f_4, f_7 . Non lo sono f_5 e f_6 . Le ascisse di convergenza sono pari a: $\alpha_{f_1} = -\infty$, $\alpha_{f_2} = 0$, $\alpha_{f_3} = 0$, $\alpha_{f_4} = 1$, $\alpha_{f_5} = 0$.

Esercizio 2. $\alpha_{f_1} = -7$, $\alpha_{f_2} = 7$, $\alpha_{f_3} = -5$, $\alpha_{f_4} = -4$, $\alpha_{f_5} = 5$, $\alpha_{f_6} = 0$, $\alpha_{g_1} = \alpha_{g_2} = \alpha_{g_3} = -\infty$, $\alpha_{g_4} = -6$.

Esercizio 3. $f_1 \in \Lambda^1, \alpha_{f_1} = 0$; $f_2 \notin \Lambda^1$; $f_3 \notin \Lambda^1$; $g_1 \in \Lambda^1, \alpha_{g_1} = 0$; $g_2 \in \Lambda^1, \alpha_{g_2} = -2$; $g_3 \in \Lambda^1, \alpha_{g_3} = 1$.