APPLICAZIONI di MATEMATICA

ESERCIZI parte 8

Esercizi “teorici”

Es. 1.1 - Sia F razionale, reale positiva e $F(0) = 0$. Stabilire se è RP la funzione

$$G(s) = F(s - 24)$$

Es. 1.2 - Sia F reale, razionale e sia $F(1 + j) = -4 + j$. Allora F è RP?

Es. 1.3 - Siano

$$F_1(z) = \frac{(z-5)(z-1)}{(z+7)(z+9)}; \quad F_2(z) = \frac{(z-5)(z-1)}{(z+7)(z+9)(z+11)}.$$

F_i è una trasformata Zeta? In caso affermativo calcolare il raggio di convergenza.

Es. 1.4 - Sia F una trasformata zeta e sia $f_0 = 0$. Stabilire quanto vale

$$\text{Res}\left[\frac{F(z)}{z}, \infty\right].$$

Es. 1.5 - Sia $\{f_n\}$ una successione il cui raggio di convergenza è 1. Quanto vale il raggio di convergenza delle successioni $\{g_n\}, \{h_n\}$, dove

$$g_n = e^{-7n} f_n; \qquad h_n = e^{4n} f_n \qquad ?$$

Es. 1.6 - Sia F razionale RP dispari. Quanto vale il

$$\lim_{s \to 0}\left[F(s) + \frac{1}{F(s)}\right] \ ?$$

Es. 1.7 - Sia F reale, razionale pari e $F(-9) = 0$. Tale funzione può essere positiva?

Es. 1.8 - Sia F reale, razionale avente uno zero doppio in $s = \infty$. Tale funzione può essere positiva?

Es. 1.9 - Sia F una trasformata zeta. La funzione $G(z) = z^{-3}F(z)$ è una trasformata zeta? In caso affermativo, quanto vale g_1?

Es. 1.10 - A quale delle seguenti trasformate zeta non è applicabile il Teorema del valore finale?

$$F_1(z) = \frac{z^2+1}{z^2+4z+3}; \quad F_2(z) = \frac{z-1}{z+5}; \quad F_3(z) = \frac{z-1}{5z-1}.$$

Es. 1.11 - Sia F una trasformata zeta. Calcolare $\mathrm{Res}[z^{-2}F(z), \infty]$.

Es. 1.12 - Sia

$$F(z) = \frac{z^2+6}{z^7 - z^5 + z^3}$$

Calcolare l'antitrasformata zeta per $n = 1$ e $n = 2$.

Es. 1.13 - Sia

$$f_n = n^7 e^{-14n}$$

e sia F la sua trasformata Zeta. Calcolare

$$\mathrm{Res}\ [F(z), \infty].$$

Es. 1.14 - Sia F una funzione razionale propria RP. Quanto vale

$$\mathrm{Res}\ [F(s)/s, \infty]\ ?$$

Es. 1.15 - [Difficile] Sia F una funzione razionale dispari e sia $v = \mathrm{Im}\ F$. Provare che F non è positiva se esiste un punto $j\omega$ appartenente al dominio di F tale che

$$v_y(0, \omega) < 0\ .$$

(Suggerimento: usare le formule di Cauchy-Riemann)

Es. 1.16 - Sia F una funzione razionale RP. Può aversi per qualche $\omega \in \mathbb{R}$

$$F(7 - 5j\omega) = -3 + j \ ?$$

Es. 1.17 - Provare che le seguenti funzioni sono trasformate Zeta e calcolarne il raggio di convergenza

$$F_1(z) = \sin(\frac{2z+1}{z-1})\frac{z+2}{z^8}; \quad F_2(z) = \frac{z+12}{z^8(z-6)^{14}}.$$

In entrambi i casi poi calcolare f_4, i.e. l'antitrasformata per $n = 4$.

Es. 1.18 - L'affermazione : "Sia $F \in$ RP. Allora

$$G = \frac{F}{1+F^2} \in RP".$$

a) È vera soltanto se F è razionale
b) È vera soltanto se l'equazione $F(s) = j$ non ha soluzioni
c) È vera soltanto se F è dispari
d) Non è mai vera
e) È sempre vera.

Es. 1.19 - Sia F una trasformata Zeta con $R_f = 0$. Sia poi F non razionale. Classificare il punto $z = 0$ per F.

Es. 1.20 - Sia F una trasformata Zeta con $R_f = 0$. Sia poi

$$\lim_{z \to 0} F(z) = 1.$$

Calcolare l'antitrasformata Zeta di F.

Es. 1.21 - Sia F la trasf. di Laplace di $f \in \Lambda^1$. Sia poi $\alpha_f = -\infty$ e $F(0) = 118$. Classificare $s = \infty$ per F.

Es. 1.22 - Sia $F(s) = e^s$. Allora quale delle seguenti affermazioni è corretta?
a) F è trasf. di Laplace di $f \in \Lambda^1$, ma non trasf. Zeta.
b) F è trasf. di Laplace di $f \in \Lambda^1$, e anche trasf. Zeta.
c) F non è né trasf. di Laplace di $f \in \Lambda^1$, né trasf. Zeta.
d) F è trasf. Zeta, ma non trasf. di Laplace di $f \in \Lambda^1$.

Es. 1.23 - Sia $F(z)$ una trasf. zeta e sia $F(z) = z^{-1}G(z)$. Allora:

a) G è una trasf. Zeta?

b) Per il calcolo dell'antitrasformata zeta di F si puo' applicare la proprietà della traslazione?

c) Sia $R_f = 5$. Allora l'antitrasformata $\{f_n\}$ è una successione limitata?

Es. 1.24 - Sia $f \in \Lambda^1$ e sia F la sua trasformata di Laplace.

a) Se F è costante, quanto vale $F(0)$?

b) Se $\alpha_f = -\infty$, si può applicare ad F il secondo teorema dei Residui?

c) Se $\alpha_f = -\infty$, quanto vale $\mathrm{Res}[F(s), \infty]$?

d) Sia $g(t) = \int_0^t f(r)dr \in \Lambda^1, \alpha_f = -9, F(0) = 5$, Quanto vale α_g?

Es. 1.25 - Sia $f \in \Lambda^1$. Le funzioni $g(t) = f(t)u(t-4)$, $h(t) = f(t-4)u(t)$ sono funzioni di classe Λ^1? In caso affermativo, calcolare la loro ascissa di convergenza.

Es. 1.26 - Sia f una funzione continua e periodica di periodo 4 per $t > 0$. Allora $f(t)u(t) \in \Lambda^1$? In caso affermativo, calcolare α_f.

Risposte agli esercizi

Es. 1.1 - G non è R.P., essendo $G(24) = 0$ e dunque $1/G$ ha un polo in 24 (2^a condizione criterio delle 4 condizioni).
Es. 1.2 - No, essendo $\mathrm{Re}(1 + j) > 0$ deve essere $\mathrm{Re}F(1 + j) \geq 0$.
Es. 1.3 - Entrambe sono trasformate Zeta, essendo razionali con $\deg(N) \leq \deg(D)$. Risulta $R_{f_1} = 9$, $R_{f_2} = 11$.
Es. 1.4 - Vale 0 infatti lo sviluppo in serie di Laurent all'infinito è dato da: $F(z)z^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n-1} = f_0/z + f_1/z^2 + \cdots$ da cui $\mathrm{Res}[F(z)/z, \infty] = -f_0 = 0$.
Es. 1.5 - $R_g = e^{-7}$, $R_f = e^4$.
Es. 1.6 - Vale ∞. Infatti se F è dispari ha in $s = 0$ o una zero o un polo, da cui $F + 1/F$ ha necessariamente un polo in $s = 0$.
Es. 1.7 - No. Infatti essendo pari risulta $F(9) = 0$ e $1/F$ ha un polo in 9.
Es. 1.8 - No. Infatti $1/F$ ha un polo doppio in $s = \infty$.
Es. 1.9 - Sì, perché è analitica per $|z| > R_f$ e $\lim_{z\to\infty} G(z) = 0$. Essendo $z = \infty$ uno zero di ordine almeno 3, sicuramente $g_0 = g_1 = g_2 = 0$.
Es. 1.10 - $R_{f_1} = 3, R_{f_2} = 5$ e dunque il teorema del valore finale non è applicabile (Deve essere $R_f \leq 1$). Per F_3 è $R_f = 1/5 < 1$ e il teorema del valore finale vale, essendo la successione antitrasformata convergente esponenzialmente a zero.
Es. 1.11 - $F(z)z^{-2}$ ha all'infinito uno zero di ordine ≥ 2 e dunque il residuo è 0.
Es. 1.12 - $z = \infty$ è zero di ordine 5, dunque $f_0 = f_1 = \cdots = f_4 = 0$.
Es. 1.13 - $\mathrm{Res}[F(z), \infty] = -f_1 = -e^{-14}$.
Es. 1.14 - Se F è razionale propria allora $F(s)/s$ ha in $s = \infty$ uno zero di ordine ≥ 2 e dunque il residuo è nullo.
Es. 1.15 - Se F è dispari risulta $\mathrm{Re}F(j\omega) = 0$, ossia $u(0, \omega) = 0$. Dalle formule di Cauchy-Riemann si ha anche $u_x(0, \omega) = v_y(0, \omega) < 0$. Posto $h(x) = u(x, \omega)$, allora $h(0) = 0$, $h'(0) < 0$, da cui $h(x) < 0$ per $x > 0$ sufficientemente piccolo, ossia $\mathrm{Re}F(x + j\omega) < 0$ con $x > 0$. Dunque $F \notin P$.
Es. 1.16 - No, essendo $\mathrm{Re}(7 - 5j\omega) > 0$ deve essere $\mathrm{Re}F(7 - 5j\omega) \geq 0$.
Es. 1.17 - F_1 è analitica per $|z| > 1$ e $z = \infty$ è uno zero di ordine 7. Dunque è una trasformata Zeta e $f_0 = f_1 = \cdots = f_6 = 0$. F_2 è razionale con $\deg N \leq \deg D$ e dunque è una trasformata Zeta. Essendo $z = \infty$ uno zero di ordine 21, risulta $f_0 = f_1 = \cdots = f_{20} = 0$.
Es. 1.18 - Sempre vera, essendo $G = (1/F + F)^{-1}$ e la reciproca di funzioni R.P. è R.P.

Es. 1.19 - $z = 0$ essenziale. Infatti F è analitica per $|z| > 0$ e $z = \infty$ è singolarità eliminabile; essendo non razionale ha una singolarità essenziale che può essere solo in $z = 0$.
Es. 1.20 - F è analitica per $|z| > 0$ e $z = 0$ è singolarità eliminabile o punto regolare, così come $z = \infty$. Dunque F è costante e $F(z) = 1$ per ogni z, da cui $f_0 = 1$, $f_n = 0$ per ogni $n \geq 1$.
Es. 1.21 - $s = \infty$ essenziale. Infatti F è analitica in tutto $\mathbb{C}$ e $\lim_{\mathrm{Re}s \to +\infty} F(s) = 0$, da cui F non può essere razionale, né un polinomio, né costante. Essendo non razionale deve avere una singolarità essenziale che può essere solo in $s = \infty$.
Es. 1.22 - c). Infatti essendo $s = \infty$ una singolarità essenziale, F non è una trasformata Zeta. Inoltre $\lim_{x \to +\infty} e^x e^{jy}$ non esiste, per cui F non è una trasformata di Laplace.
Es. 1.23 - a) Non è detto. Ad es. $F(z) = (z-1)/z$ è una trasformata Zeta, ma $G(z) = z - 1$ non lo è essendo $s = \infty$ un polo.
b) Non è detto, solo se G è anche essa una trasformata Zeta. Vedi esempio precedente.
c) No, se $\{f_n\}$ è limitata, allora $R_f \leq 1$. Infatti se esiste $M > 0$ tale che $|f_n| \leq M$, allora $R_f \leq \lim_n \sqrt[n]{M} = 1$.
Es. 1.24 - a) $F(0) = 0$ dovendo aversi $\lim_{\mathrm{Re}s \to +\infty} F(s) = 0$.
b) Sì, poichè F ha solo $s = \infty$ come singolarità.
c) $\mathrm{Res}[F(s), \infty] = 0$ poichè F ha solo $s = \infty$ come singolarità.
d) $\alpha_g = 0$. Infatti essendo $G(s) = F(s)/s$ e $F(0) \neq 0$, allora G ha un polo in $s = 0$. Da $\alpha_f = -9$ segue che F non ha singolarità con $\mathrm{Re}s > -9$. Dunque G è analitica per $\mathrm{Re}s > 0$ ed avendo una singolarità con $\mathrm{Re}s = 0$ necessariamente $\alpha_g = 0$.
Es. 1.25 - Sì e $\alpha_g = \alpha_h = \alpha_f$.
Es. 1.26 - Sì e $\alpha_f = 0$. Infatti essendo limitata risulta $\alpha_f \leq 0$. Se fosse $\alpha_f < 0$ allora f tenderebbe a zero all'infinito, il che è assurdo. Dunque $\alpha_f = 0$.