Appunti Schematici sul Calcolo combinatorio

Dato un insieme S di n oggetti, si vuole contare le configurazioni che possono assumere k oggetti tratti da questo insieme. Prima di affrontare un problema combinatorio bisogna capire due fatti importanti:

- Se l'ordinamento è importante, ovvero se due configurazioni sono le stesse a meno di un riordinamento ($\{x, y, z\}$ è uguale a $\{z, x, y\}$?)
- Se si possono avere più ripetizioni di uno stesso oggetto, ovvero se uno stesso oggetto dell'insieme S può meno essere riusato più volte all'interno di una stessa configurazione.

Parleremo di *disposizioni* nel caso in cui conti l'ordinamento, di *combinazioni* in caso contrario. Nel caso particolare di $k = n$ le disposizioni si dicono anche *permutazioni*.

• **Regola fondamentale del conteggio**: *Dati due insiemi N, M, con $\#N = n$, $\#M = m$, allora $\#(M \times N) = mn$.* In altre parole, se una attività può essere svolta in m modi diversi, e se per ognuno di questi modi una seconda attività può essere svolta in n modi diversi, allora il numero totale di modi per svolgere le due attività è mn.

1) Permutazioni semplici (senza ripetizioni)

Una permutazione di un insieme di n oggetti è una presentazione *ordinata*, cioè una n-upla, dei suoi elementi, nella quale ogni oggetto viene preso una ed una sola volta. Per contare quante siano le permutazioni di un insieme con n oggetti, si osservi che il primo elemento della configurazione pu essere scelto in n modi diversi, il secondo in $(n-1)$, il terzo in $(n-2)$ e così via sino all'ultimo che potrà essere preso in un solo modo essendo l'ultimo rimasto. Dunque, indicando con $\mathcal{P}_n$ l'insieme delle possibili permutazioni di un insieme di n elementi, si ottiene che esse sono esattamente $n!$

$$\#\mathcal{P}_n = n(n-1)(n-2)\cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \qquad (1)$$

$\boxed{\texttt{P}}$

Ad esempio gli anagrammi della parola ORA sono $3! = 6$: ARO, AOR, ROA, RAO, ORA, OAR.

2) Permutazioni con ripetizioni

In alcuni casi un insieme può contenere elementi che si ripetono. In questo caso le permutazioni di tali elementi restituiscono la stessa configurazione. Sia $r < n$ il numero di elementi distinti e indichiamo con k_1, k_2 fino a k_r il numero di volte che si ripetono rispettivamente gli elementi $1, 2, \ldots, r$, con $k_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, r$ e $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$. Allora il numero di permutazioni che danno luogo ad n-uple distinte sono

$$\#\mathcal{P}_n^R = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} \qquad (2)$$

$\boxed{\texttt{Pr}}$

Si tratta, infatti, di dividere il numero delle distinte permutazioni di n oggetti per il numero delle permutazioni dei k_1 elementi tra loro uguali, poi per il numero delle permutazioni dei k_2 elementi tra loro uguali, e così via.
Ad esempio gli anagrammi della parola ORO sono $3!/2! = 3$: ORO, OOR, ROO.

3) Disposizioni semplici (senza ripetizioni)

Le disposizioni semplici di k di elementi presi da un insieme di n oggetti, con $k \leq n$, sono le k-uple (insiemi ordinati di k elementi) che si possono formare a partire da un insieme di n elementi, dove ogni elemento è preso al più una volta (estrazioni senza reimbussolamento). Per avere il numero di queste configurazioni si considera che il primo componente di una tale sequenza può essere scelto in n modi diversi, il secondo in $(n-1)$ modi distinti e così via, sino al k-esimo che può essere scelto in $(n-k+1)$ modi diversi. Pertanto il numero di disposizioni semplici di k oggetti estratti da un insieme di n oggetti è dato da:

$$\#\mathcal{D}_{n,k} = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{3}$$ $\boxed{\texttt{D}}$

Le permutazioni semplici sono casi particolari delle disposizioni semplici, per $k=n$: $\#\mathcal{P}_n = \#\mathcal{D}_{n,n}$. (Si ricorda che per definizione $0! = 1$)

4) Disposizioni con ripetizioni

Le disposizioni con ripetizioni di k di elementi presi da un insieme di n oggetti, sono le k-uple che si possono formare a partire da un insieme di n elementi, dove ogni elemento può essere preso più volte (estrazioni con reimbussolamento). Si hanno quindi n possibilità per scegliere il primo componente, n per il secondo, altrettante per il terzo e così via, sino al k-esimo.

$$\#D^R_{n,k} = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ volte}} = n^k \tag{4}$$ $\boxed{\texttt{Dr}}$

Si osserva che può anche essere $k > n$.

5) Combinazioni semplici (senza ripetizioni)

Si dicono combinazioni semplici di k oggetti presi da un insieme di n oggetti, con $k < n$, i possibili sottoinsiemi che si possono formare prendendo k oggetti tra gli n oggetti, senza ripetizioni. Il numero delle combinazioni semplici di k oggetti presi tra n oggetti distinti, è dunque uguale al numero delle disposizioni semplici di lunghezza k, fratto il numero delle possibili permutazioni di tali k oggetti (poiché l'ordine non conta).

$$\#\mathcal{C}_{n,k} = \frac{\#\mathcal{D}_{n,k}}{\#\mathcal{P}_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{5}$$ $\boxed{\texttt{C}}$

6) Combinazioni con ripetizioni

Quando l'ordine non è importante ma è possibile avere componenti ripetute, si parla di combinazioni con ripetizioni: si dicono dunque combinazioni con ripetizioni di k oggetti presi da un insieme di n oggetti, i possibili sottoinsiemi che si possono formare prendendo k oggetti da gli n oggetti, anche con ripetizione di uno stesso oggetto (reimbussolamento). Il numero di combinazioni con ripetizione di k oggetti presi da n si può quindi pensare uguale al numero di combinazioni senza ripetizioni di k oggetti presi tra $n+k-1$.

$$\#\mathcal{C}^R_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}. \tag{6}$$ $\boxed{\texttt{Cr}}$

Si osserva che può essere $k > n$. Ad esempio, le combinazioni con ripetizioni di k oggetti presi da n, rappresentano il numero delle derivate parziali di ordine k calcolabili per una funzione di n variabili (funzione di classe C^2).